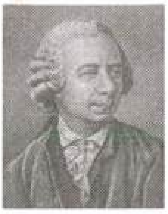
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



8

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 5В
аудитория – посадочное место

41306261
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ИГ	+	+ МК	
7 АЮ	7 ОЛ	7 АУ	7 АБ	28

№1

Рассмотрим числа которые ~~п~~ представляются в виде двух подряд идущих чисел: a, $a+1$ их сумма $2a+1$, т.е. числа которые представляются в виде 2 подряд идущих нечётные. Рассмотрим числа которые представляются в виде 4 подряд идущих $a+(a+1)+(a+2)+(a+3) = 4a+6 \vdots 2$. Т.к. к числ... одновременно $\vdots 2$ и $\not\vdots 2$ не может быть $\Rightarrow$ число не представляется в виде 2 или в виде 4 $\Rightarrow$ Всего получим $\leq (6-1) - 1 = 4$.

от 2 ... до 6

Пример $n = 105$. $n = 34+35+36$

$n = 19+20+21+22+23$

$n = 15+16+17+18+19+20$

$n = 52+53$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306261 — номер участника

лист 2 из 10

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Ответ: 4

№3

$$\cancel{\frac{(a-1)^2 \cdot a}{b+c+1}} \qquad \underset{0}{\overset{\ge}{-b^2}} - \underset{0}{\overset{\ge}{c^2}} - \underset{0}{\overset{\ge}{a}}$$

$$\frac{(a^2-2a-1-b-c+1)\cdot a}{b+c+1} \le 0$$

$$\frac{(a-1)^2\cdot a-(b+c+1)\cdot a}{b+c+1} \le 0$$

$$\frac{(a-1)^2\cdot a}{b+c+1} \le a$$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{(a-1)^2\cdot(a+b+c+1)}{(b+c+1)\cdot(a+b+c+1)} =$$

$$= \frac{(a-1)^2 + \frac{(a-1)^2\cdot a}{b+c+1}}{a+b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}.$$ Т.к. выражения симметричны, то $\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le \frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}$

и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Первый день, заключительный этап

8 — класс
41306261 — номер участника
лист 3 из 10

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{a^2-a+1}{a+b+c+1}+$$

$$+\frac{b^2-b+1}{a+b+c+1}+\frac{c^2-c+1}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2+3-a-b-c}{a+b+c+1}=$$

$$=\frac{a+b+c-a-b-c+3}{a+b+c+1}=\frac{3}{a+b+c+1}$$

№2

Будем интерпретировать ~~треугольники~~ уголки такие: кружок — ученик — кружок

По кружкам их $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3=63$.

Пускай у каждого ученика k кружков тогда всего уголков

$m\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ ← всего пар уголков у одного человека

кол-во учеников

~~$m\geq 7 \Rightarrow k\cdot k-1$~~

$\Rightarrow m\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2}=63$ $m\geq 7\Rightarrow \frac{k\cdot(k-1)}{2}\leq 9$

$m<60\Rightarrow\frac{k\cdot(k-1)}{2}\geq 2$ $k=1$ $\frac{k\cdot(k-1)}{2}=0$ — не подходит

дит $k=2$ $\frac{k\cdot(k-1)}{2}=1$ не подходит.

$k = \cancel{4}\ 3$ $\frac{k\cdot(k-1)}{2} = 3$ Тогда

$m = \frac{63}{3} = 21$

$k = 4$ $\cancel{\frac{4\cdot(4-1)}{2}}$ $\frac{k\cdot(k-1)}{2} = 6$, Тогда

$m = \frac{63}{6} = 10{,}5 \Leftarrow$ число учеников натуральна $\Rightarrow$ не подходит

$k = 5$ $\frac{k\cdot(k-1)}{2} = 10$. $10 > 9$

$\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ при $k \geq \cancel{6}\,5$ > 9

$\frac{k\cdot(k-1)}{2}$, $k \geq 5$ $\cancel{\geq 7}$ $\geq \frac{k^{10}(k-1)^{10}}{2}$ $\cancel{+9}$ ≥ 10 $\cancel{\frac{k\cdot(k-1)}{2}}$

$\Rightarrow$ подходит только кол-во колец $= 21$.

Пример. кружки

~~I VIII, учеников, 1-ый, 8-ой, 15-ый~~

I ученик 1, 2, 3
II ученик 1, 4, 5
III ученик 1, 6, 7
IV ученик 2, 4, 6
V ученик 2, 5, 7
VI ученик 3, 5, 6
VII ученик 3, 4, 7

Заметим что каждая пара присутствует ровно

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306261 — номер участника

лист 5 из 10

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

7 раз.

Тогда у 8-ого, 15-ого ученика будет тоже самое что и у I, у 9, 16 → тоже что у II. у 10, 17, тоже что у III, у 11, 18 тоже что у IV у 12, 19 тоже что и у V у 13, 20 тоже что у ~~IV~~ VI у 14, 21 тоже что у VII тогда каждая пара кружков будет присутствовать ровно $1 \cdot 3 = 3$ раза.

Ответ: 21.

N4.

– ~~Пусть~~ ответ > 250

~~Пусть~~ у нас есть

Продлим все звенья до прямых. Будем считать что прямые в одной группе если они параллельны. Поймём что группа прямых а под углом в 90° пересекаться могут только с прямыми одной группы иначе в ~~них~~ две прямые разных груп-

нах оказались бы параллельными
~~доказали~~ что групп ≥ 3
Иначе: Тогда у нас есть группа
и другая которые пере-
секаются под углом 90° (иначе
≤ 250 пересечений)
Возьмём ~~эту~~ точку пересече-
ния каких-то прямых.
одна из прямых содержащих
эту точку — будет осью
абсцисс, а другая ординат
рассмотрим звено которое лежит на ~~прямую~~ горизонталь-
ной прямой. А он отрезок оси абсцисс (ординат?)
с максимальным x. Звено явно
максимальным
пересекает ~~другую~~ прямую
другое звено иначе ответ
≤ 250 тогда рассмотрим
конец этого звена с большим
x, его содержит ещё одно
звено, но они не могут ле-
жать на одной прямой $\Rightarrow$
Это звено, которое мы про-
длить до прямой то прямая будет параллельны

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 41306261

класс номер участника лист 7 из 10

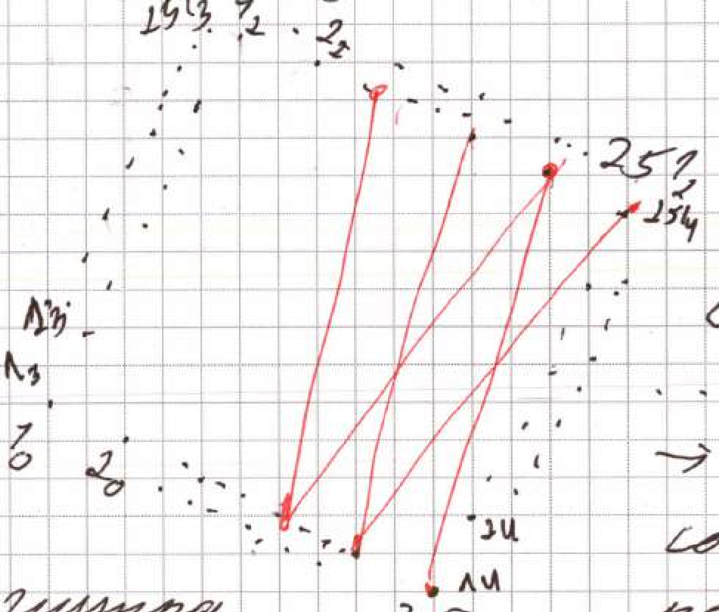
он образует противоречие т.к. у неё x окажется больше.

Если групп ровно 3. Т.е в какой-то группе недостанет-ся групп прямых которые в пересечении дают 90° ($3 \vdots 2$) $\Rightarrow$ чтобы ответ был > 250 групп должно быть ≥ 4. $\Rightarrow$ будет группа $\leq \frac{1000}{4} = 250$ прямых содержащихся в этой группе. Тогда чтобы ответ был ≥ 250 должны быть группы в пересечении дающие 90° с этой группой (иначе ответ 0) но каждую прямую из этой группы её пересекут максимум под углом 90° $250 \cdot 1 = 250$ раз $\Rightarrow$ ответ ≤ 250.

Пример.

Пример:

Возьмём вершинки с номерами между соседними 1,2 всех их будет 1000 II группы.



I группы. 1_0 соединяем с 2_2, 2_0 с 3_2 ... $k_0 \to k+1_2$ ... $\to 250_0 \to 251_2$

отрезки соседние будут (если продлить их прямые) параллельны и равны т.к. $k_2\,k+1_2 \parallel k-1_0\,k_0$ и $k_2\,k+1_2 = k-1_0\,k_0$

II группа соединяем 1_2 с 1_0, $2_3 \to$ с 2_2 ... $(k+1)_2 \to$ с k_2 ... $251_0 \to 250_2$

аналогично соседние 2 отрезки равны и параллельны

III группы.

2_3 с 1_4 $3_3 \to 2_4$ ... $(k+1)_3$ с k_4

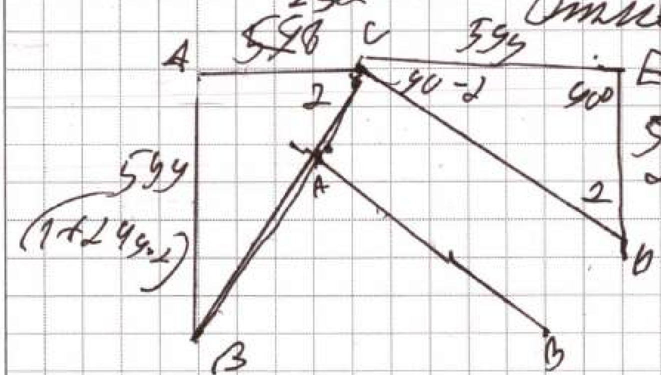
... 251_3 с 250_4 Аналогично соседние отрезки равны и параллельны.

1_3 с 2_4 2_3 с 3_4 ... k_3 с $(k+1)_4$

250_3 с 251_4 Аналогично соседние отрезки равны и параллельны

Поймём что все отрезки равны $\Delta 1_0 1_3 2_2 = \Delta 1_3 1_0 2_0$ $= \Delta 2_3 1_0 1_4 = \Delta 1_0 1_4 2_4$

по углу в $90°$ и двум сторонам. Группа $k_0 \to (k+1)_2$ (252 ~~598~~ ~~549~~ −2 вправо 549 вверх от начала) пересекается под углом в $90°$ с начиная $(k+1)_3 \to k_4$ (252 ~~598~~ вниз 599 вправо ~~вверх~~)



Отметим D точку что $CD \parallel AB$ $CD = AB$ $\Delta BAC = \Delta CED$

$\Rightarrow \angle BCD = 180 - 2°$ $-(90° - 2°) = 90°$

Аналогично для $(k+1)_0 \to k_2$ $k_3 \to (k+1)_4$

Цикл связный $1_0 \to 2_2 \to 3_0 \to \ldots 251_0$

$(1_4) \to 2_3 \to 3_4 \to 4_3 \to 5_4 \to \ldots 250_3 \to 251_4$ (251_3)

$\to 250_0 \to 249_2 \to \ldots 2_0 \to 1_2 \to$ (251_3) 250_4 2_0 249_3 250_2

2_4 2_5 1_3 1_2 (25 1_0 (4) ~~1250~~ Всего шагов был $250 \cdot 4 = 1000$. Вершину только через 1000 ⇒ т.к кол-во шагов ~~был 1000~~ максимально до возвращения в ту же вершину то мы обошли весь цикл.

Ответ: 250.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 5В

аудитория – посадочное место

41306261

номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

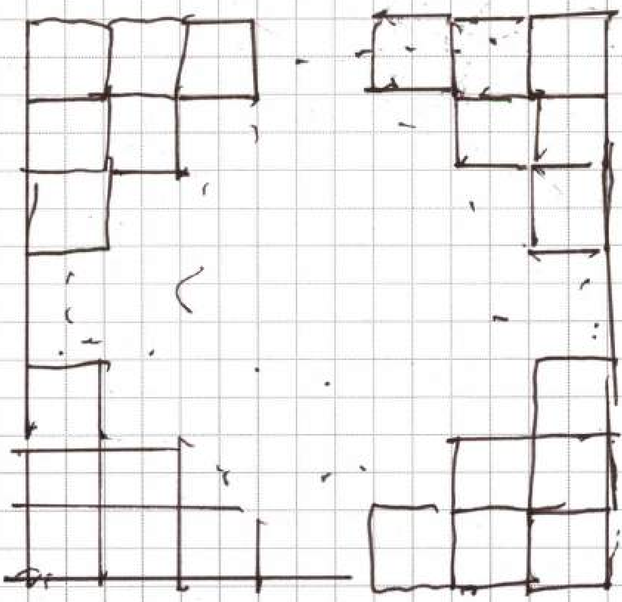
- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5	6	7	8	Σ
+ ВС ✓	+ КН	+ А.М.	+. МК	
7 ЧД	7 МС	7 КН	7 КА	27
			6 кло.	

№5

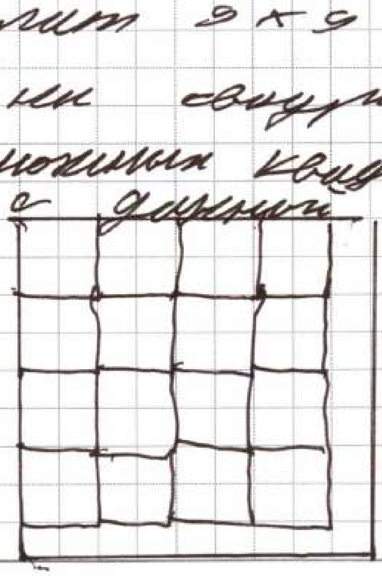
Разделим квадрат 30 на 30 на 225 не пересекающимися квадратами 2 на 2



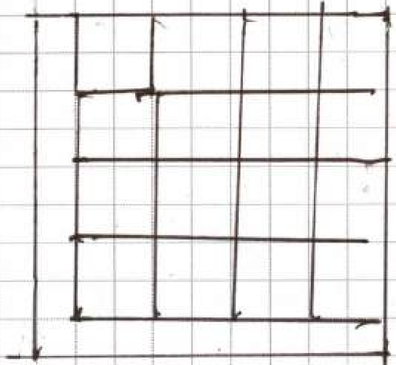
Заметим что в каждом квадрате 2×2 может стоять максимум 1 король (иначе они друг друга побьют) ⇒ только ~~202~~ 225−220=5 квадратов 2×2 нет короля. Квадрат 9×9 может разбиться на квадраты 2×2:

Варианты возможных квадратов с данной клеткой

от этой клетки рассмотрим все случаи

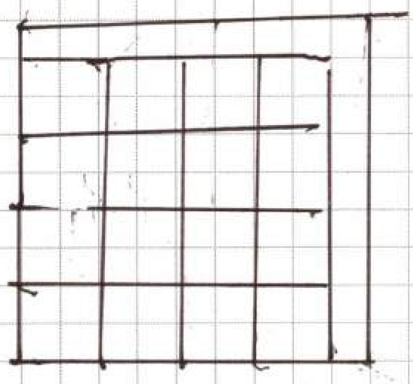


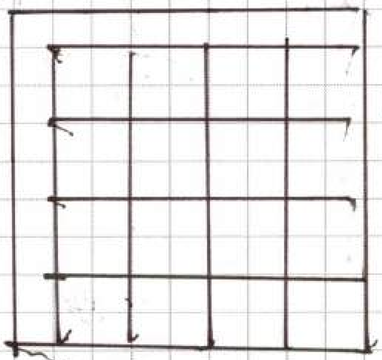
Квадратов 16 ⇒ королей ≥ 16−5=11



Квадратов 16 ⇒ королей ≥ 16−5=11

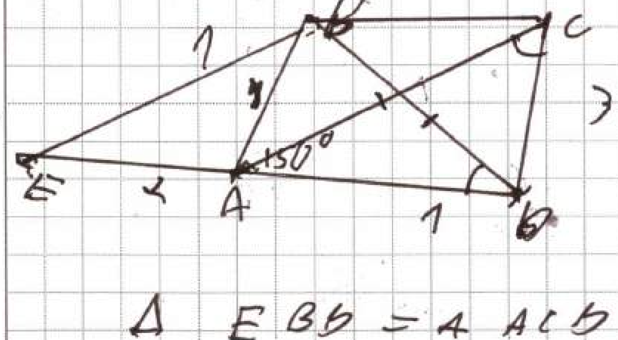
Квадратов 16 ⇒ королей ≥ 16−5=11





Квадратов 16 ⇒ королей ≥ 16−5=11

№6



Отметим точку E на луче DA такую что ED = 3 ⇒ EA=2

△ EBD = △ ACD

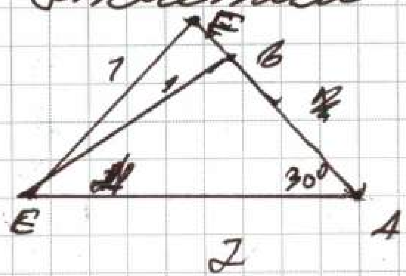
∠ACD = ∠EDB BK = AC BD ED=CD=3

⇒ EB = AD=1 ∠BAE = 180°−150°=30°

△ доп Докажем что △ EAB — это

Пусть треугольник с углами $30°$, $60°$, $90°$. Пусть

Отметим точку F такую что $\angle FEA = 60°$ и E лежит на луче B AB



Углы $\triangle FEA$ $30°$, $60°$, $90°$ ⇒ сторона напротив угла под $30°$ равна $\frac{1}{2}$ гипотенузы (угла мишине прямоугольного треугольника) ⇒ $FE = EB = 1$

⇒ Если F и B различные точки то $\triangle FEB$ — равнобедренный тогда сумма его углов будет $90° + 90° + \angle FEB > 180°$

⇒ $\triangle FEB$ — не треугольник

⇒ F и B и E лежат на одной прямой ⇒ F и B совпадают

Иначе прямые EB и BA — совпадут т.к F и B принадлежат им обеим ⇒ $\angle BEA = \angle FEA = 60°$

$\angle EDC = \angle ADC$ т.к $\triangle EDB = \triangle ACB$

⇒ $\angle EDC = 60°$ $\triangle EDC$ — равносторонн ный с углом в 60° $\Rightarrow$ он ещё и равносторонний $\Rightarrow \angle DEC = 60^\circ$, $EC=ED=3$ $\Rightarrow \angle BED = \angle DEC \Rightarrow$ луч EB и EC совпадает $\Rightarrow BC = EC - EB = 2$

Ответ: 2

№7

Пускай ~~он~~ может быть такое: $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)\cdot p^2$

Пускай какое-то из 3 скобок ~~выражений~~ $\vdots\, p^2$. Без ограничения общности (выражение симметрично) $ab+a+1 \vdots p^2$ $\Rightarrow (bc+b+1)(ca+c+1)$ ~~$\leq abc+1$~~ иначе

~~$(bc+b+1)(ca+c+1) > (bc+b+1)\cdot(a+1) = abc+ab+a+bc+b+1 > abc+1$~~

$\leq abc+1$ иначе произведение трёх скобок $> (abc+1)\cdot p^2$

Но $(bc+b+1)(ca+c+1) > (bc+b+1)\cdot(a+1) = abc+ab+a+bc+b+1 > abc+1$

$\Rightarrow$ нет только одной скобки $\vdots\, p^2$. Т.к. p — простое то скобки или $\vdots\, p$ или не имеет общих делителей $\Rightarrow \geq 2$ скобки $\vdots\, p$ без ограничения общности ~~это скобки~~ $ab+a+1$ и $bc+b+1$

Т.к. $(ab+a+1) \vdots p$ ~~то $ab+a \underset{p}{\equiv} -1$~~

~~$bc+b+1 \vdots p \Rightarrow bc+b \underset{p}{\equiv} -1$~~

то и $bc+b+1 \vdots p$ то

$(ab+a+1)(bc+b+1) \vdots p$

$\Rightarrow$ ||

$ab^2c+abc+bc+ab^2+ba+b+(ab+a+1) \vdots p$

⇓

$ab^2c+abc+\cancel{bc}\,ba+ab^2+(ba+b+1)-1 \vdots p$

⇓

~~$ab^2c+abc+ba+ab^2-1 \vdots p$~~

Т.к. $ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p$

то $(ab+a+1)\cdot c+(bc+b+1)\cdot a \vdots p$

||

$abc+ca+c+bc+b+1$

|| Т.к. p-простое

$(ca+c+1)\cdot(b+1) \Rightarrow$ либо $ca+c+1 \vdots p$

либо $b \underset{p}{\equiv} -1$, но если $b \underset{p}{\equiv} -1$, то

$ab+a+1 \underset{p}{\equiv} a\cdot -1+a+1 \equiv -1$, а

А числа сравнимые с -1 по модулю p не кратны p

т.к. $1 \not\vdots\, p \Rightarrow ca+c+1 \,\vdots\, p$

$\Rightarrow \cancel{(ab+a+1)}\ (ca+c+1)\cdot b-(bc+b+1)=$

$= bac-1 \,\vdots\, p$ С другой стороны $\underbrace{(ab+a+1)}_{\vdots\, p}\underbrace{(bc+b+1)}_{\vdots\, p}\underbrace{(ca+c+1)}_{\vdots\, p} \,\vdots\, p^3$

$\Rightarrow abc+1 \,\vdots\, p \Rightarrow \cancel{ab+c}\,(abc+1)-(abc-1)$

$=2 \,\vdots\, p \Rightarrow p=2$

$ca+c+1 \,\vdots\, 2 \Rightarrow c\cdot(a+1)+1 \,\vdots\, 2$

$\Rightarrow c\cdot(a+1) \not\vdots\, 2 \Rightarrow c \not\vdots\, 2 \Rightarrow a+1 \not\vdots\, 2$

$\Rightarrow a \,\vdots\, 2 \Rightarrow \underbrace{ab}_{\vdots 2}+\underbrace{a}_{\vdots 2}+1 \not\vdots\, 2$

Но тогда $ab+a+1$ одновременно и $\vdots\, p^{(2)}$ и не $\vdots\, p\ (2)$. Противоречие такого натурального числа не существует.

№ 6

Докажем что если такой пример существует то ~~каждый~~ какие бы мы бы не взяли 24 гири ~~будет соответствовать~~ $\Rightarrow$ то их вес они всегда окажутся больше чем вес любых других 22.

Пусть не так.

Тогда возьмём эти 22 гири и без 22 этих гирь а 24 гири вес которых в сумме меньше возьмём две самые тяжёлые. Оставшиеся $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$. Тогда b_1+b_2+22 гири которые оказались больше их вес оставшихся больше чем всех остальных ⇒ а мы не сможем их уравновесить с другими гирями ⇒ любые 24 гири тяжелее любых других 22 гирь.

конец 22-леммы

Упорядочим вес гирь по возрастанию

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{49} < a_{50}$

Возьмём все гири с нечётными номерами кроме a_{49}, ~~Если их~~ уравновешивать [Уравновешивать их]

⇒ 24 другими гири их не могут их сумма $\geq a_2 + a_4 + \dots + a_{48} > a_1 + a_3 + \dots + a_{47}$

Почему именно добавлено?

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306261 — номер участника

лист 8 из 9

Значит их уравновешивают а 3 гири их максимальный a_8 гири

вес $a_{50}+a_{49}+a_{48}+a_{46}+\dots+a_{12}+a_{10}+a_8$ $a_{10}+a_8$ без a_6 тут

$\Downarrow$

$a_{50}+a_{49}+a_{48}+\dots+a_{10}+a_8 > a_1+a_3+\dots+a_5$ $+a_6$ тут 24 гири вместе с a_6

$+a_7+\dots a_{47} \Rightarrow a_{50}+a_{49}+a_{48}+(a_{46}-a_{47})$

$+(a_{44}-a_{45})+\dots(a_8-a_9) > a_1+a_3+a_5$ $+a_6$

$+a_7$. Тогда

если мы возьмём $a_{50}, a_{49}, a_{48},$

$a_{47}, a_{45}, a_{43}\dots a_9, a_6$ 24 гири

а его уравновесить может

только все ~~гири~~ остальные гири т.к

$a_{50}+a_{49}+a_{48} > a_1+a_3+a_5+a_7$ $+a_6$ где 7 без a_6 7

$a_{47}+a_{45}+\dots a_9 > a_{46}+a_{44}+$ тут нарушаются индексы

$\dots+a_8 \quad a_6 > a_2, a_4 \Rightarrow$ ~~нужно~~

их сумма больше ~~всех~~ другой без

a_2. Значит мы их сумма Забыто a_6

равна всем остальным мы

всем без остальных и a_1 всем ?a_1

остальным они равны быть

не может т.к не максимальна ?

возьмём $a_{50}, a_{49}, a_{48}, a_{47}, a_{46},$

$a_{43}\ a_{41}, a_{39}\dots a_{11}, a_9, a_6$ 23 гири $+a_9$

Заметим что это сумма не максимальная но больше прошлой ($a_{46} > a_{45}$). Значит они равны всем остальным и без a_1, но тогда она = прошлой, но это неверно - т.к иначе $a_{46} = a_{45}$ Противоречие.

~~$a_{50} + a_{49} + a_{48} + a_{47} + \ldots + a_3 + a_6 = a_{46} + a_{45} + \ldots + a_{10} + a_8 + a_4 + a_7$~~

Из неравенств $\begin{cases} a_{50} + a_{49} + a_{48} > a_1 + a_3 + a_5 + a_7 \\ a_{47} + a_{45} + \ldots + a_9 > a_{46} + a_{44} + \ldots + a_8 \\ a_6 > a_4 \end{cases}$

$a_{50} + a_{49} + a_{48} + a_{47} + a_{45} + \ldots + a_9 + a_6 > a_{46} + a_{44} + \ldots + a_8 + a_7 + a_5 + a_4 + a_3 + a_1$, далее выводим, что

$a_{50} + a_{49} + a_{48} + a_{47} + a_{45} + \ldots + a_9 + a_6 = a_{46} + a_{44} + \ldots + a_8 + a_7 + a_5 + a_4 + a_3 + a_2$