Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 56 7 A Ca

$+\frac{}{y\ |\ M}$

Ответ: 4 пятерки.

Заметим, что если n является 4-хорошим, то оно $\vdots 2$, т.к. среди 4 последовательных чисел ровно 2 четных и 2 нечетных числа. С другой стороны, если n является 2-хорошим, то $n \not\vdots 2$, так как среди двух последовательных чисел ровно одно нечётное и одно четное. Значит, n не может одновременно являтся и 4-хорошим, и 2-хорошим $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Вася может получить ≤ 4 пятерок

Пример. $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$

2-хорошее: $52 + 53 = 105$

3-хорошее: $34 + 35 + 36 = 105$

5-хорошее: $19 + 20 + 21 + 22 + 23 = 105$

6-хорошее: $15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 105$

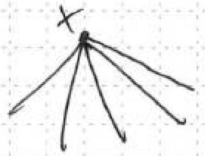
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 56

7 +

Ответ: 21.

Пусть каждый ученик ходит ровно в x кружков, а всего учеников ℓ. Тогда рассмотрим произвольного ученика:



Тогда такой ученик является хорошим для любой пары кружков, в которые он ходит, а всего у него таких пар $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$. Тогда, с одной стороны, количество хороших учеников (ученик может быть хорошим больше одного раза (как мы поняли, каждый ученик является хорошим $\frac{x(x-1)}{2}$ раз)) равно $\frac{\ell\cdot x\cdot(x-1)}{2}$.

С другой стороны, $\#$ хороших $= 3\cdot\frac{7\cdot 6}{2}$ ← всего различных пар кружков $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ell\cdot x\cdot(x-1) = 3\cdot 7\cdot 6 = 2\cdot 3^2\cdot 7$ $\quad 6<\ell<60$. Заметим, что $x(x-1)\,\vdots\, 2$, поэтому ℓ является нечетным делителем числа $2\cdot 3^2\cdot 7$, т.е. делителем числа $3^2\cdot 7$, и $6<\ell<60$. Разберём все варианты:

$\ell=1<6$ ⊗ $\ell=3<6$ ⊗

$\ell=7: \Rightarrow x(x-1)=18$ ← $\nexists x\in\mathbb{N}$ $\left(\begin{matrix}4\cdot 3=12<18\\ 5\cdot 4=20>18\end{matrix}\right)$ ⊗

$\ell=9: \Rightarrow x(x-1)=14$ ← $\nexists x\in\mathbb{N}$ $\left(\begin{matrix}4\cdot 3=12<14\\ 5\cdot 4=20>14\end{matrix}\right)$ ⊗

$\ell=21: \Rightarrow x(x-1)=6$; $x=3$ ✓

$\ell=63>60$ ⊗

Пример. Пронумеруем кружки от 1 до 7. Сначала приведём пример из 7 учеников, чтобы для $\forall$ пары кружков был ровно 1 хороший:

1-ый уч.	2-ой уч.	3-ий уч.	4-ый	5-ый	6-ой	7-ой
123	145	167	246	257	347	356

номера кружков, в которые ходит ученик

Теперь $\forall i\le 7$: сделаем, чтобы $i+7$-ой и $i+14$-ый ходили туда же, что и i-ый ✓

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 56

Лемма. Если $0 \le \frac{x}{y} \le 1$, ~~то~~ и $a \ge 0$, то
$x, y \ge 0$

$\frac{x}{y} \le \frac{x+a}{y+a}$

Док-во! т.к. $\frac{x}{y} \le 1$, то $\frac{x}{y} = 1 - \frac{y-x}{y}$, где $y-x \ge 0$,

а $\frac{x+a}{y+a} = 1 - \frac{(y+a)-(x+a)}{y+a} = 1 - \frac{y-x}{y+a}$, но т.к. $y+a \ge y$, то ≥ 0

$\frac{y-x}{y+a} \le \frac{y-x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} \le \frac{x+a}{y+a}$, ч. т. д.

Заметим, что каждая из дробей вида $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le 1$, т.к.

иначе: $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} > 1 \Rightarrow a^2 - 2a + \cancel{1} > b + c + \cancel{1} \Rightarrow a^2 > 2a+b+c \ge a+b+c$,

Тогда но $\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{= a+b+c} > a+b+c + \underbrace{b^2+c^2}_{\ge 0}$ (?!). ~~[illegible]~~ Ясно, что ~~[illegible]~~ каждая дробь ≥ 0, т.к. числитель ≥ 0 и знам. > 0

Тогда, по лемме: $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{b+c+1+a}$! Аналогично сделав для двух других дробей и суммируя, получаем:

$$\frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{1+a+b+c} \overset{?}{\le} \frac{3}{1+a+b+c}$$

$$\| \qquad \text{т.к. } a^2+b^2+c^2-a-b-c=0.$$

$$\frac{\cancel{a^2} - \cancel{a} + 1 + \cancel{b^2} - \cancel{b} + 1 + \cancel{c^2} - \cancel{c} + 1}{1+a+b+c} = \frac{3}{1+b+c+a}$$

7п
+ИМ

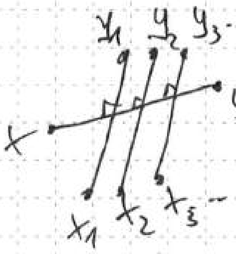
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 56

$+_{\text{ТМ}}$ $7_{\text{ИК}}$

Ответ: 250.

Оценка. Рассмотрим произвольное звено: его пересекают $\geq k$ звеньев под углом 90°, но и эти k звеньев должны пересекать еще какие-то $k-1$ звеньев под прямым углом.



Заметим, что т.к. $\forall i\ XY \perp X_iY_i$, то $\forall i,j: X_iY_i \parallel X_jY_j$, т.е. прямые X_iY_i и X_jY_j одного направления.

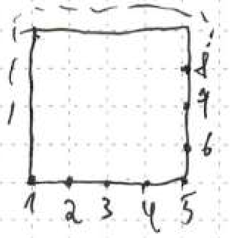
Также ясно, что ~~#~~ количество направлений $\vdots 2$, т.к. каждому направлению соответствует направление, перпендикулярное ему. ~~Тогда, пусть напр~~

А еще мы ранее выяснили, что ~~каждого~~ ~~напра каждому направлению~~ для $\forall$ направления $\geq k$ звеньев этого направления. Но, с другой стороны, звеньев 1000, поэтому $1000 \geq k \cdot 2x$, где $2x$ — количество направлений. Заметим, что если $x=1$, то всего 2 направления, перпендикулярные друг другу, но тогда расстояние между любыми двумя параллельными звеньями $\geq \ell$ (длина звена), но тогда каждое звено может быть пересечено ≤ 1 ~~дру~~ другим звеном (?!). Тогда,

$x \geq 2 \Rightarrow k \leq 250$ ✓

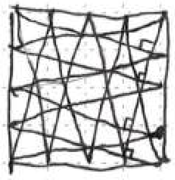
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Пример. Рассмотрим квадрат 250 × 250. Пронумеруем все 1000 узлов, которые лежат на границе квадрата, от 1 до 1000 против часовой стрелки:



Будем проводить ломаную так: (я приведу ее „порядок обхода"):

1, 750, 3, 748, 5, ..., 249, 502, 251, 1000, 253, 998, 255, ..., 752, 501, 250, 503, 248, ..., 2, 751, 500, 753, 498, ..., 252, 1. Выглядит это примерно так:



тут каждому звену перпендикулярны ровно 250 других, т.к., например, звену 1;750 перпендикулярны звенья 251;1000, 253;998, ...

Аналогично для трех оставшихся направлений.

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 56

7/8

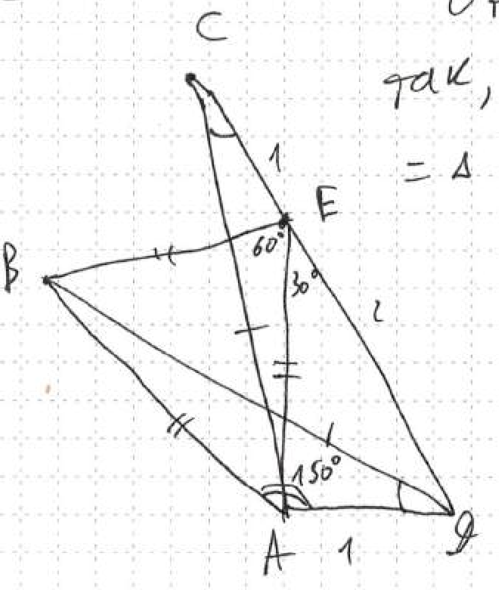
А.С.

От противного. Разобьём всю доску на квадраты 2×2. Заметим, что тогда в любом квадрате 9×9 целиком будут лежать 16 квадратов 2×2. Тогда, если в каком-то квадрате 9×9 оказалось ≤10 королей, то в этих 16 квадратах 2×2 было ≤10 королей, но ясно, что в каждом квадрате 2×2 может быть максимум 1 король, всего квадратов 2×2 225, а королей — 220 => всего 5 квадратов, в которых нет короля, но если на 16 квадратов приходится ≤10 королей, то среди них есть ≥6 квадратов без короля (?!).

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 56 7

$\boxed{\text{Ответ: } 2}$



Отметим на отрезке CD точку E так, что $CE = 1$. Тогда $\triangle ACE \overset{I}{=} \triangle BDA$: $\left\{\begin{array}{l} AC = BD \\ CE = AD = 1 \\ \angle ADB = \angle ACD \end{array}\right| \Rightarrow AE = AB$, $\angle CEA = 150°$,

т.е. $\angle AED = 30°$. Тогда, если опустить перпендикуляр из D на AE, то он равен $\frac{1}{2} DE$, т.к. $\angle AED = 30° \Rightarrow$ этот перп. равен 1, но AD тоже равно 1, и если $AD \not\perp AE$, то $AD >$ перп. из D на AE (?!) $\Rightarrow AD \perp AE$, т.е. $\angle BAE = 150° - 90° = 60°$, т.е. в $\triangle BAE$ $AB = AE$ и $\angle BAE = 60° \Rightarrow \triangle ABE$ - равносторонний, т.е. $BE = AE$, $\angle BEA = 60° \Big| \Rightarrow \angle CEB = 180° - 30° - 60° = 90° = \angle EAD$.

Т.е. $\triangle CEB \overset{I}{=} \triangle DAE$: $\left\{\begin{array}{l} CE = AD = 1 \\ BE = AE \\ \angle CEB = \angle DAE = 90° \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = DE = \boxed{2}$

+ КА

Задача № 7 Лист ~~1~~2 из ~~1~~2 Номер участника: 56

Ответ: нет, не может.

!мм 6 ~~6~~ 7

От противного. Пусть оказалось, что $\exists p \in \mathbb{P}$:

$(abc+1)p^2 = (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$. Заметим, что

~~если какая~~ произведение любых двух скобок из правой части

больше, чем $abc+1$, а значит, что не может

быть такого, что какая-то из скобок в правой части $\vdots p^2$. Значит, две скобки делятся

на p. НУО $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$. Тогда и

разность $ab - bc + a - b \vdots p$, а еще $abc+1 \vdots ac+c+1$.

т.к. $ab+a+1 \vdots p$, то $abc + ac + c \vdots p$, а т.к. $bc+b+1 \vdots p$, то

и $abc+ab+a \vdots p$ $\Big| \Rightarrow ca - ab + c - a \vdots p$.

Мы знаем: $\begin{cases} ab - bc + a - b \vdots p \\ ca - ab + c - a \vdots p \end{cases}$ $\Rightarrow$ сумма, домноженная на −1. $bc - ca + b - c \vdots p$, а еще $bc+b+1 \vdots p$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~bc−ca+b−c~~ $bc+b+1-(bc-ca+b-c) \vdots p$, т.е.

$ca+c+1 \vdots p$. Но т.к. $abc+1 \vdots ca+c+1$, то и

$abc+1-(ca+c+1)b \vdots ca+c+1$, т.е. $bc+b-1 \vdots ca+c+1$,

но при $p>2$ $bc+b-1 \not\vdots p$, а $ca+c+1 \vdots p$ (?!) Значит,

~~$p=2$. Но заметим, что если $\begin{cases} a \not\vdots 2 \\ b \not\vdots 2 \\ c \not\vdots 2 \end{cases}$, то $abc+1 \vdots 2$, а каждая~~

~~из скобок п.ч. $\not\vdots 2$ (?!) Значит, одно из чисел $\vdots 2$, т.е. $abc+1 \vdots 2$,~~

~~$\Rightarrow$ правая часть $\vdots 8$, а левая часть $\vdots 4$, но $\not\vdots 8$ (?!) Значит,~~

~~такого не бывает.~~

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 56

~~при $p=2$: Если $a, b, c \not\vdots 2$, то $abc+1 \vdots 2$ а каждая из скобок п.ч. $\vdots 2$ (?!). Если 1 число из a,b,c четно, 2 числа $\vdots 2$.~~

~~Тогда НУО $a \vdots 2$. Тогда $ab+a+1 \not\vdots 2$, $bc+$~~

при $p=2$: Если $a, b, c \not\vdots 2$, то $abc+1 \vdots 2$, но тогда ни одна из скобок $\vdots p_{=2}$ (?!). Иначе, мы знаем, что каждая скобка из п.ч. $\vdots 2$, а $abc+1 \not\vdots 2$, т.к. ≥ 1 из $a, b, c \vdots 2$, но тогда левая часть равенства $(abc+1)p^2 = (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)$ $\not\vdots 8$, а правая часть $\vdots 8$ (?!). Значит, частное $\dfrac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1}$ не может быть квадратом простого числа.

чего?! если $a \vdots 2, b \vdots 2, c \vdots 2$, то каждая скобка нечётна.