Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 57

4. Пример: (2,3,5 и 6 - хорошее)

$n=45=22+23=14+15+16=7+8+9+10+11=5+6+7+8+9+10$

Оценка:

Всего на $(1,7)$ $7-1-1=5$ нат. чисел

$\Rightarrow$ если он получил 5 пятёрок, то он нашёл 2-хорошее и 4-хорошее число одновременно

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow n=a+(a+1)=2a+1 \not\vdots\, 2 \\ &n=b+(b+1)+(b+2)+(b+3)=4b+6 \,\vdots\, 2 \end{aligned}\right\} \text{Противоречие.}$$

7 ТМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 57

n - кол-во уч., $7 \le n \le 59$ + 7

k - кол-во кружков, посещаемых любым фиксированным учеником

m - кол-во троек "ученик + 2 посещаемых им круж."

$\forall$ пары круж. (их $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$) $\exists$ ровно 3 таких тройки, э* их, $\Rightarrow$ по тройке определяется пара кружков

$\Rightarrow m = 21 \cdot 3 = 63$

$\forall$ уч. (их n) $\exists$ ровно $\frac{k(k-1)}{2}$ таких троек, э* его

$\Rightarrow m = n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$

$\Rightarrow k(k-1) = \frac{2m}{n} = \frac{2 \cdot 63}{n} \le \frac{2 \cdot 63}{7} = 18$ и $\ge \frac{2 \cdot 63}{59} > 2$

$\Rightarrow k \le 4$, т.к. $5(5-1) = 20$, $k \ge 3$, т.к. $2(2-1) = 2 \Rightarrow k \in \{3, 4\}$

$\Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} \in \{3, 6\} \Rightarrow n = \frac{2m}{k(k-1)} \in \{21, 10.5\}$, $\mathbb{N}$

$\Rightarrow n = 21$

Ответ: 21

*на всякий случай, это не буква русского алфавита, а символ "принадлежит(ат)"

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 57

$(a-1)^2 = a^2-2a+1 = a+b+c-b^2-c^2-2a+1 = (b+c+1)-(a+b^2+c^2)$

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\ldots+\ldots^{*} = \frac{b+c+1-a-b^2-c^2}{b+c+1} = 3-\left(\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}+\ldots+\ldots\right)$,

$\frac{3}{1+a+b+c} = 3-\frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}$

(!) $\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} \geq \frac{a+b+c}{1+a+b+c}$

~~6~~ 7 ТА

(!) $\underbrace{(a+b^2+c^2)}_{\shortparallel}(1+a+b+c) \geq (a+b+c)(1+b+c)$

$(a^2+b^2+c^2)-a(a-1) = (a+b+c)-a(a-1)$.

(!) $\underbrace{(a+b+c)(1+b+c)-a(a-1)(1+b+c)}_{(a+b^2+c^2)(1+b+c)}+(a+b^2+c^2)a \geq$

$\geq (a+b+c)(1+b+c)$

(!) $a(a+b^2+c^2) \geq a(a-1)(1+b+c)$. (где $a \geq 0$)

(!) $a+b^2+c^2 \geq a+ab+ac-1-b-c$. ← сокращено на a, хотя a м.б. $=0$.

(!) $a+b+c+b^2+c^2-ab-ac-a+1 \geq 0$.

(!) $a^2+b^2+c^2+b^2+c^2-ab-ac-a+1 \geq 0$

(!) $2b^2-ab+2c^2-ac+a^2-a+1 \geq 0$

* "что-то + … + …" обозначает "что-то" + его циклические перестановки $a \to b \to c \to a$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 57

$2b^2-ab+2c^2-ac+a^2-a+1=2\left(b-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}+2\left(c-\frac{a}{4}\right)^2-$

$-\frac{a^2}{8}+a^2-a+1\geq\frac{3}{4}a^2-a+1=\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a}{2}-1\right)^2\geq0$. Доказано.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 3 Номер участника: 57

При $k=250$.

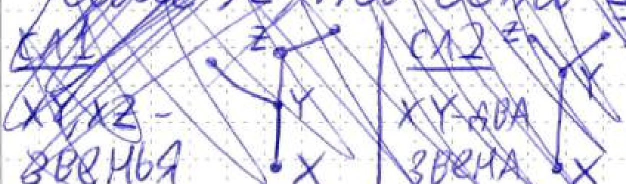
+ 7

Оценка:
$\exists\, k \geq 251$

• Разобьём звенья ~~ло~~ ломаной на классы эквивалентности, эквивалентными будем считать те, которые перпендикулярны или сонаправлены. Очевидно это корректное определение (О.Э. рефлексивно, симметрично и транзитивно).

• Тогда $\measuredangle$ К.Э. C и его звено A_1, тогда ему перпендикулярны некие $B_1, \ldots, B_{251}$ (как минимум) $\Rightarrow$ они все $\in C$. Тогда B_1 перпендикулярны некие $A_1, \ldots, A_{251}$ (как минимум) $\Rightarrow$ они тоже $\in C$ $\Rightarrow |C| \geq 502$, всего 1000 звеньев $\Rightarrow$ не может быть 2-х К.Э. $\Rightarrow$ все звенья лежат в C. Заведём Декартову Систему Координат, где $Ox \parallel A_1$, остальное ~~на~~ неважно, и $\measuredangle$ X - верш. ломаной с наим. ($\leq$ чем у остальных) y-координатой. ~~Тогда~~ Тогда из неё "вниз" не ведёт ни одного звена, а "вверх" $\leq 1^{*}$, и при этом все звенья идут либо вниз, либо вверх ($\perp A_1$), либо "горизонтально" ~~$(\perp A_1)$~~ $(\parallel A_1)$ $\Rightarrow \geq 1$ звено из X ведёт "горизонтально", пусть это будет A. Тогда $\exists$ звено B, пересекающее A $\Rightarrow$ его (B) нижняя вершина ниже X, что невозможно.

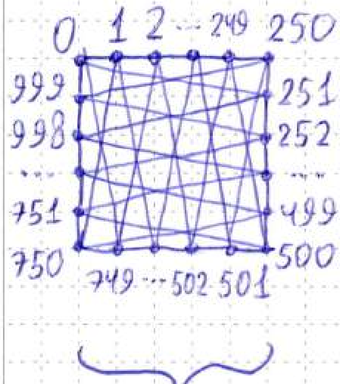
~~*если же та есть 2 случая:~~



Задача № 4 Лист 2 из 3 Номер участника: 57

Пример на $k=250$:

• Рассмотрим квадрат со стороной 250 и разделим каждую его сторону на 250 равных частей (они НЕ станут звеньями), а в их концах (их $4\cdot 250=1000$) расставим вершины ломаной.



250 (длина)

(и пронумеруем, начиная с угла и по часовой стрелке). И звенья как на рисунке (4 типа):

I: $k\to 749-k$, $k\in[0,249]$

~~II: $k\to k+749$, $k\in[$~~

II: $k\to 1249-k$, $k\in[750,999]$

III: $k\to 751-k$, $k\in[1,250]$

IV: $k\to 1251-k$, $k\in[750,1000]$

Где 0-я вершина считается ~~таж~~ также и 1000-й, все "I" $\perp$ "II" (и пересекаются), "III" $\perp$ "IV", а у $\forall$ звена длина составляет $\sqrt{250^2+1^2}=\sqrt{62501}$.

• Все требования она, как видно из рисунка, выполняет, кроме одного – надо доказать, что она – это одна ломаная, а не много маленьких.

• Начнём с 0-й вершины и пойдём в 251, потом в 998 и так далее. Т.е., наш маршрут:

$0\to 251\to 998\to 253\to\ldots\to 1000-2n\to 250+(2n+1)\to\ldots\to$

$\to 498\to 499\to 750$, потом в 1, оттуда в 748, ...

$750\to 1\to 748\to 3\to\ldots\to 2n+1\to 750-(2n+2)\to\ldots\to 249\to 500$

Потом, из 500, мы идём в 751, потом в 498, т.е., $500 \to 751 \to 498 \to \ldots \to 750+(2n+1) \to 500-(2n+2) \to \ldots \to 999 \to 250$. Оттуда в 501, 248, ..., т.е., $250 \to 501 \to 248 \to 503 \to \ldots \to 250-2n \to 500+(2n+1) \to \ldots \to 747 \to 2 \to 749 \to 0$. Вот мы и вернулись. (и по пути прошли все верш.)

Итого на i-м шаге мы в:

если $i \in [0, 250]$:
- если $i \vdots 2$: $1000-i$
- если $i \not\vdots 2$: $250+i$

если $i \in [250, 500]$:
- если $i \vdots 2$: ~~750-i~~ $1000-i$
- если $i \not\vdots 2$: $i-250$

если $i \in [500, 750]$:
- если $i \vdots 2$: $1000-i$
- если $i \not\vdots 2$: $i+250$

если $i \in [750, 1000]$:
- если $i \vdots 2$: $1000-i$
- если $i \not\vdots 2$: $i-250$

Когда мы побывали в i:

если $i \vdots 2$: $1000-i$

если $i \not\vdots 2$:
- если $i \in (0, 250) \cup (500, 750)$: $i+250$
- если $i \in (250, 500) \cup (750, 1000)$: $i-250$

("Формула", на самом деле, такая же как и в ф-ла нахождения того, где мы на i-м шаге)

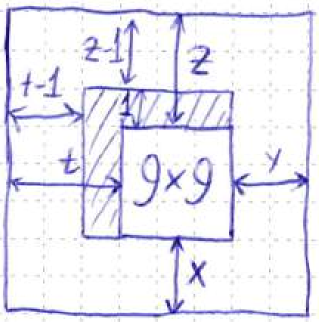
Таким образом, наш пример на $k=250$ действительно удовлетворяет всем необходимым условиям.

Ответ: 250.

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 57

7А4

5.



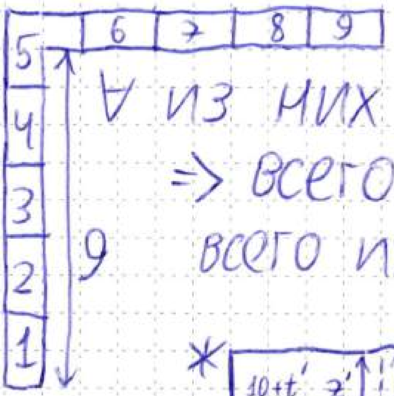
Посмотрим на расст. от ~~кв-та 9~~ сторон кв-та 9×9 до сторон кв-та 30×30 – x, y, z, t

$x+z=30-9 \not\vdots 2 \Rightarrow x \not\equiv_2 z$, НУО $x \vdots 2$

$y+t=30-9 \not\vdots 2 \Rightarrow y \not\equiv_2 t$, НУО $y \vdots 2$

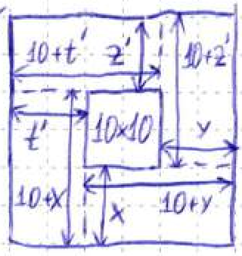
Если мы посмотрим на незаштрихованную область вне кв-та 9×9 (заштр. обл. ∪ кв-т 9×9 = кв-т 10×10), то её можно разбить на кв-ты 2×2*, в каждом из которых ≤1 короля**, а всего их $\frac{30^2-10^2}{4}=\frac{800}{4}=200$ ⇒ там всего ≤200 королей.

А в заштрихованной обл. ≤9 королей, т.к. в ∀ из зон 1-9 ≤1 короля, т.к. ∀ из них может поместиться в кв-т 2×2



⇒ всего вне кв-та 9×9 ≤200+9=209 королей, всего их 220 ⇒ внутри кв-та 9×9 их ≥11

*



– мы делим 30×30\10×10 на 4 прямоугольника с ⋮2 сторонами, ∀ из которых разбивается на кв-ты 2×2

** если бы их было ≥2, они бы ~~друг~~ друга били.

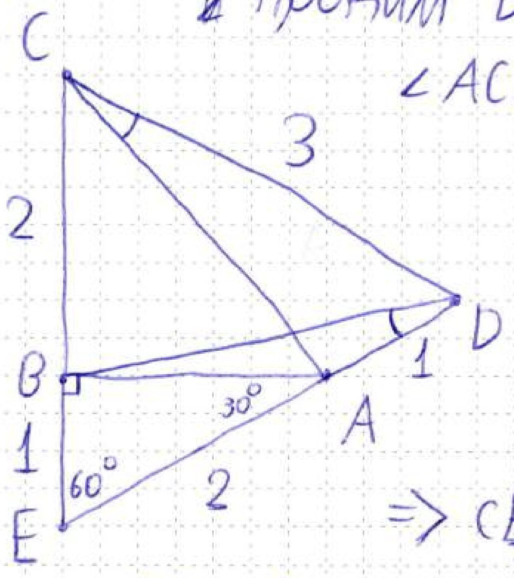
+

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 57

т. 6с

$7_{КА}$

Продим $\overrightarrow{DA}$ на 2 до точки E



$\angle ACD = \underset{\angle ADB}{\angle BDE}$, $CD = DE = 3$, $AC = BD$

$\Rightarrow \triangle BED = \triangle ADC$

? $\Rightarrow BE = AD = 1, EA = 2, \angle EAB = 30°$ *

? $\Rightarrow \angle BEA = 60° \Rightarrow \angle \overset{CDA}{EAD} \overset{?}{=} 60°$,

$ED = DC = 3$

$\Rightarrow CE = ED = DC = 3$, $\angle CED = 60° = \angle BED$ $\Rightarrow B \in EC$

$\Rightarrow BC = CE - BE = 3 - 1 = 2$.

Ответ: 2

* $\angle EAB = 180° - 150° = 30°$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 57 7см +TA

Обозначим простое число за p (Пусть может)

$$p^2 = \frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = (ab+a+1)\cdot\underbrace{\frac{ab^2c+abc+\ldots+1}{abc+1}}_{>ab+a+1}$$

~~Аналогично~~ $\Rightarrow ab+a+1 \not\vdots\, p^2$, остальные (цикл. сдвиги)

Аналогично, $(ab+a+1)\cdot\ldots\cdot\ldots^{*} \,\vdots\, p^2 \Rightarrow$ НУО $ab+a+1 \,\vdots\, p$

$bc+b+1 \,\vdots\, p$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+ca+c \,\vdots\, p \\ abc+ab+a \,\vdots\, p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ca+c-ab-a \,\vdots\, p \\ 1+ab+a \,\vdots\, p \end{matrix}\right\} \Rightarrow ca+c+1 \,\vdots\, p$$

$$\Rightarrow (ab+a+1)\cdot\ldots\cdot\ldots \,\vdots\, p^3 \Rightarrow \left.\begin{matrix} abc+1 \,\vdots\, p \\ abc+ab+a \,\vdots\, p \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ab+a-1 \,\vdots\, p \\ ab+a+1 \,\vdots\, p \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \,\vdots\, p \Rightarrow p=2 \Rightarrow abc \not\vdots\, 2 \Rightarrow \underbrace{ab, a, 1 \not\vdots\, 2}_{\text{т.к. } abc \,\vdots\, ab,\, a,\, 1} \Rightarrow ab+a+1 \not\vdots\, 2 \,!?$$

Противоречие $\Rightarrow$ не может

* что-то$\cdot\ldots\cdot\ldots$ – это произведение "что-то" и его циклических сдвигов (двух) $a \to b \to c \to a$.

Задача № 8 Лист 1 из 2 Номер участника: 57 +С67 кл6

· Заведём таблицу a_{ij}, где $i \in [1,24]$, $j \in [1,277]$ и будем расставлять в ней числа, ~~а так~~ обозначим массы гирь $m_1, \dots, m_{50}$ в порядке возрастания и заведём последовательность $M_1, \dots, M_{277}$: $\forall j$ $M_j = m_{a_{1,j}} + m_{a_{2,j}} + \dots + m_{a_{24,j}}$; все a-шки будут $\in [1,50]$.

· Начнём её заполнять (таблицу); будем представлять, что в a_{ij} j отвечает за время и оформим всё в виде процесса.

· В начале $a_i^* = i+26$, т.е., $M_1 = m_{27} + \dots + m_{50}$

· За 1 шаг будем сдвигать наименьшую a-шку, не равную $2i+2$, где i - её номер, на 1 вниз (уменьшать). Они всегда будут попарно различны, т.к., изначально $\forall i \in [1,23]$ $a_i < a_{i+1}$ (a-шки строго возрастают) и это свойство всегда будет сохраняться, т.к. $2i+2$ тоже растёт с ростом i и ни одной a-шке не придётся перешагивать через других)**

· Т.о., a_i уменьш. на $i+26-2i-2=24-i$ => всего уменьш. на $23+22+\dots+1+0 = \frac{23 \cdot 24}{2} = 276$ => 276 шагов, как и должно быть

· M-ки убывают, т.к., одна из $m_{a_1}, \dots, m_{a_{24}}$ уменьшается, а остальные не изм.

** также они будут начинать спуск по очереди: сначала a_1 уменьш. до 4, потом a_2 до 6 и т.д.

* "a_i" означает a_{ij}, где j - текущий момент, в начале $j=1$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 8 Лист 2 из 2 Номер участника: 57

• $\forall j \in [1, 277]$ M_j – сумма масс 24-х гирь => она равна сумме масс каких-то n_j гирь из остальных

<u>Лемма</u> $\forall j \in [1, 277]$ $n_j > 24$. Д-во от противного.

$\exists n_j \leq 24$, где j – максимальный номер такой n-ки.

$a_{1,j}, a_{2,j}, \ldots, a_{24,j} \in [4, 50]$. Обозн. $X = m_3 + \ldots + m_{50}$

=> $X - M_j$ – сумма масс 24-х гирь "из "остальных"", даже максимальная такая сумма, т.к., нет гирь, которые ~~и~~ из "остальных" и тяжелее $\forall$ гири из X, т.к. "гири из X" $\cup \{a_{1,j}, \ldots, a_{24,j}\} = [3, 50]$

=> т.к. $n_j \leq 24$, $X - M_j \geq M_j$, т.е., $X \geq 2M_j \geq 2M_{277}$.

Осталось док-ть, что $2M_{277} > X$.

$2M_{277} = 2m_{a_{1,277}} + 2m_{a_{2,277}} + \ldots + 2m_{a_{24,277}} = 2m_4 + 2m_6 + \ldots + 2m_{50} > m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + \ldots + m_{49} + m_{50} = X$. Доказано.

=> $\forall j \in [1, 277]$ $n_j \geq 25$, ~~=>~~ обозн. $M = m_1 + \ldots + m_{50}$

=> M_j (сумма масс 24-х гирь) + M_j (сумма масс других n_j гирь) $= \left[\begin{array}{l} M, \text{ если } n_j = 26;\ n_j + 24 = 50 \\ M - m_x, \text{ если } n_j = 25;\ n_j + 24 = 50 - 1 \end{array}\right.$

$x \in [1, 50]$

=> для $2M_j$ есть $50 + 1 = 51$ вариант, чему оно может быть равно, но $2M_1 > 2M_2 > \ldots > 2M_{277}$ – 277 различных значений, а 277 точно больше 51, Противоречие! $\boxed{\text{Ответ: нет, не может.}}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!