Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Гжель - ....
аудитория – посадочное место

41306241
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ЕМ.	+ МС	— АБ	
7 АЮ	7 ЕЗ	7 ДК	0 ВБ	21

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 1 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1

$k=2$ пусть первое число x_1, тогда число вида $2x_1+1$

$k=3$ $3x_2+3$ ~~заметим~~

$k=4$ $4x_3+6$

$k=5$ $5x_4+10$

$k=6$ $6x_5+15$

заметим что $k=2$ и $k=4$ одновременно не может быть т.к. $2x_1+1 \not\vdots 2$, а $4x_3+6 \vdots 2$ $\Rightarrow$ пятерок не больше 4, т.к. всего 5 видов и 2 вида одн. не могут.

~~Прим~~ Пример:

$n = 45 = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 = 5+6+7+8+9+10$

Ответ: ~~не больше~~ 4 пятерок.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 2 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

переберем ~~во~~ $\sqrt{2}$ на скольких кружках может учиться ~~оа~~ каждый от 0 до 7.

1. заметим, что всего пар кружков $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ на каждой ~~з~~ паре кружков по 3 чел. => всего пар кружков $21 \cdot 3 = 63$ если ~~на~~ каждый ходит на x кружков => пар кружков на которые он ходит $\frac{(x-1)x}{2}$, пусть детей y, тогда

$$63 = y \cdot \frac{(x-1)x}{2}$$

теперь переберем x:

$x=0 \Rightarrow 63 = 0$ => не может

$x=1 \Rightarrow 63 = 0 \Rightarrow y = \emptyset$

$x=2 \Rightarrow 63 = y \Rightarrow y = 63 > 60 \Rightarrow y = \emptyset$

$x=3 \Rightarrow 63 = 3y \Rightarrow \boxed{y = 21}$

$x=4 \Rightarrow 63 = 6y \Rightarrow y = \emptyset$, т.к. кол-во детей целое

$x=5 \Rightarrow 63 = 10y \Rightarrow y = \emptyset$

$x=6 \Rightarrow 63 = 15y \Rightarrow y = \emptyset$

$x=7 \Rightarrow 63 = 21y \Rightarrow y = 3 < 6 \Rightarrow y = \emptyset$

=) $y=21$ $(x=3)$ ~2

Пример: пронумеруем кружки от 1 до 7, тогда
3 ребенка: 1; 2; 7
3 ребенка: 1; 3; 6
3 ребенка: 1; 4; 5
3 ~~же~~ ребенка: 7; 3; 5
3 ребенка: 6; 2; 5
3 ребенка: 6; 7; 4
3 ребенка: 2; 3; 4

не трудно заметить что каждое число от 1 до 7 встретилось 3 раза и числа рядом с ним всегда разные г) в ~~раз~~ каждой паре ~~по~~ кружков ровно 3 ребенка.

Ответ: 21 ученик

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 4 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№ 3

1) докажем что $(a-1)^2 \leq 1$

допустим это не так

тогда $(a-1)^2 > 1 \Rightarrow a(a-2) > 0$

если $a \leq 2$ то $a(a-2) \geq 0$ т.к.

$a \geq 0$ по усл. $(a-2) \leq 0$ т.к. $a \leq 2$

произведение ≥ 0 и ≤ 0 всегда ≤ 0

$\Rightarrow a > 2$

$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$

$a^2 - a = b + c - b^2 - c^2$

$a^2 - a = \underset{>2}{a}\underset{>1}{(a-1)} > 2 \cdot 1 = 2$ (т.к. ~~пере~~ умножаются положе. числа)

$\Rightarrow b + c - b^2 - c^2 > 2$

$b + c - b^2 - c^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - b^2 + b - c^2 + c =$

$= \frac{1}{2} \underbrace{- (b - 0{,}5)^2}_{\leq 0} \underbrace{- (c - 0{,}5)^2}_{\leq 0} \leq \frac{1}{2}$, но $\frac{1}{2} < 2 \Rightarrow$ против.

$\Rightarrow (a-1)^2 \leq 1$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 5 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№3

~~аналогично $(b-1)^2 \le 1$ и $(c-1)^2 \le 1 \Rightarrow$~~

$$\cancel{\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} + \frac{1}{a+b+1} \le \frac{1}{a+b+c+1} + \frac{1}{a+b+c+1} + \frac{1}{}}$$

№3

$$\cancel{\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le}$$ $a-1$

№3

Докажем что

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \overset{?}{\le} \frac{1}{a+b+c+1}$$

$$(a-1)^2(a+b+c+1) \overset{?}{\le} b+c+1$$

$$(a^2-2a+1)(a+b+c+1) \overset{?}{\le} b+c+1$$

$$(a^2-2a)(a+b+c+1) + a+b+c+1 \overset{?}{\le} b+c+1$$

$$a\left((a-2)(a+b+c+1)+1\right) \overset{?}{\le} 0$$

$a \ge 0 \Rightarrow$ можем убрать $\Rightarrow$

$$\cancel{(a-2)}\ a^2+ab+ac+a \overset{?}{\le} 1+2(a+b+c)$$

$$a^2+ab+ac \overset{?}{\le} 1+b+c+a^2+b^2+c^2$$

$ab+ac \overset{?}{\leq} 1+b+c+\cancel{a}+b^2+c^2$

$(a-1)(b+c) \overset{?}{\leq} 1+b^2+c^2$

$(a-1)(b+c) \leq \left(\frac{(a-1)+(b+c)}{2}\right)^2$ по нер. коши

(если $a-1<0$, то доказано т.к. $b+c \geq 0$.

$\Rightarrow (a-1)(b+c)<0$, а $1+b^2+c^2>0$

$\Rightarrow (a-1)$ и $(b+c) \geq 0 \Rightarrow$ можем применить нер. коши.

Докажем что $a+b+c \leq 3$.

$\underbrace{(a-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(b-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(c-1)^2}_{\geq 0} = a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=$

$=-(a+b+c)+3 \geq 0$ ~~если~~ ~~a+b+c~~

$\Rightarrow 3 \geq a+b+c$, доказано $\Rightarrow$

$\left(\frac{(a-1)+(b+c)}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{3-1}{2}\right)^2 = 1$,

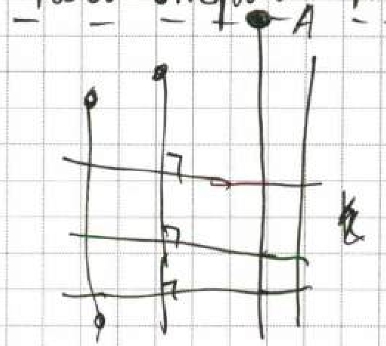
$b^2+c^2 \geq 0 \Rightarrow 1+b^2+c^2 \geq 1 \geq \left(\frac{(a-1)+(b+c)}{2}\right)^2 \geq (a-1)(b+c)$

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{1}{a+b+c+1}$ аналог. для ост. дробей $\Rightarrow$ сумма меньше $\frac{1}{a+b+c+1} \cdot 3$, ч.т.д.

№4

Оценка:

посмотрим на любую прямую она перпендикулярно пересекает k пр отрезков => все отрезки паралельны эти



отрезки тоже должны быть пересечены k прямыми отрезками, посмотрим на все эти отрезки которые вертикальны (мы можем повернуть всю плоскость чтобы эти отрезки были вер. и гор. И среди вер. найдем самую высокую точку и назовем её A заметим что из точки A идет еще один отрезок он ведет в более нижнюю точку чем A или на том же уровне вер она не может быть т.к. тогда 2 отрезка совпадают если она не вертикальная то она образует еще одну часть перпендикулярных прям и парал. отр. где хотя бы 2k ~~+2k~~ + 2k которые вер и гор.

как?

а, ок

мы же её повернули

она м.б. „горизонт" и тогда неясно откуда ещё 2k

ничего не понятно ☹

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 8 из 8

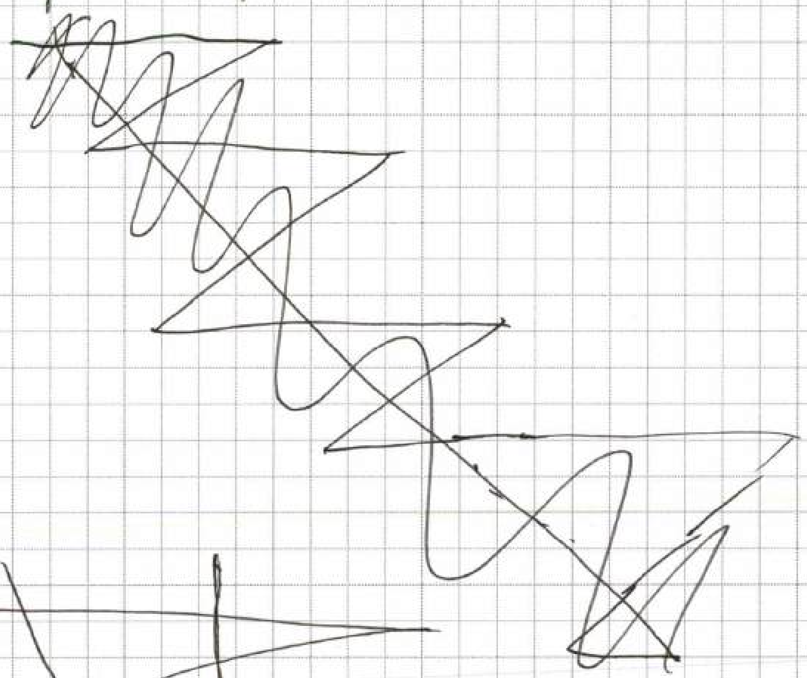
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

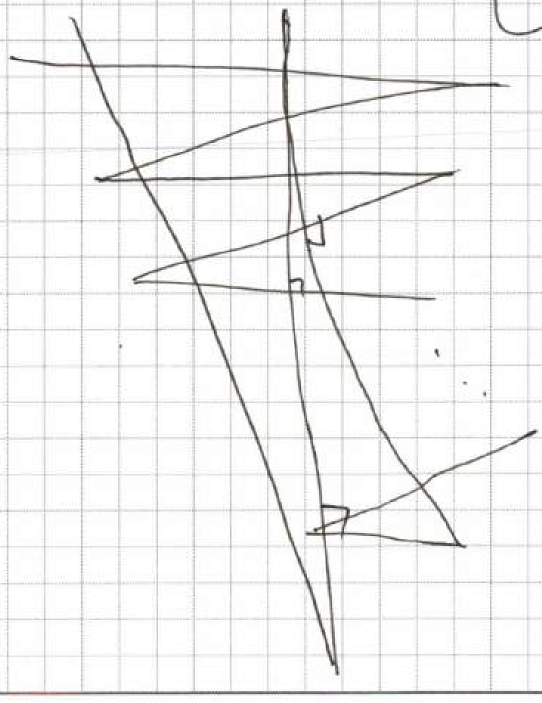
$\Rightarrow$ 1000 $\geq$ 4k $\Rightarrow$ k $\leq$ 250. откуда?

или она вер тогда её не пересекает ни один отрезок $\Rightarrow$ k = 0 $\Rightarrow$

k $\leq$ 250

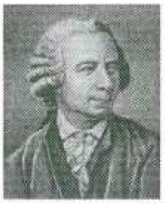
Пример:





Т.к. сначала все гор вер. и / потом все \ и вер. можно доказать что все сойдется.

Ответ: 250



Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Гжель - ....
аудитория – посадочное место

41306241
номер участника

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

5	6	7	8	Σ
+ ВС	+ КМ	-. ЧД	+ МК	
7 ЧД	7 АЮ	1 КМ	7 К.Ю.	22

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

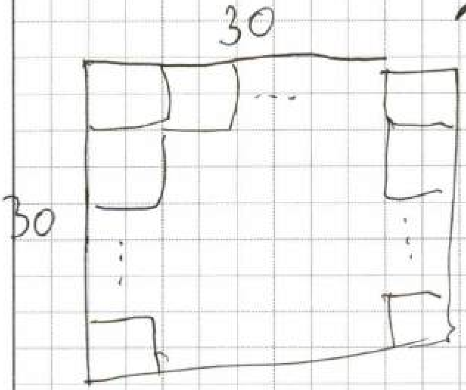
Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

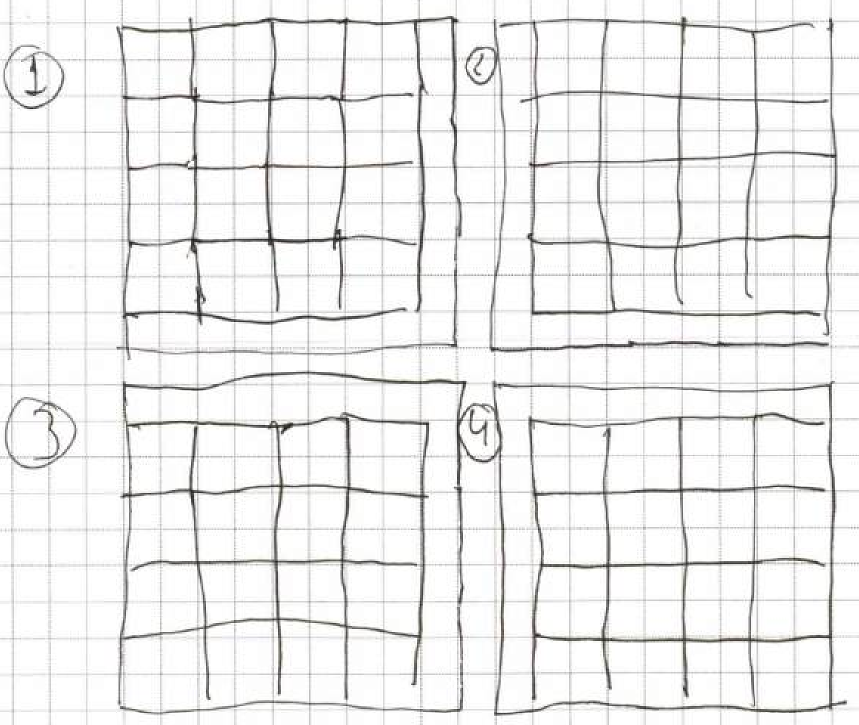
лист 1 из 11

№ 5



разобьем на квадраты 2×2 в каждом не более 1 короля =) занято 220 квадратов 2×2 всего их 225 =) не 5 пустых

рассмотрим 4 положения 9×9 отн. квадратов 2×2.



Мы рассмотрим 4 варианта т.к. в квадрате 2×2 всего 4 кл. =) в кв 9×9 есть 16 кв. 2×2 не более 5 пустых =) королей хотя бы 11 ($\leq 16-5$), ч.т.д.

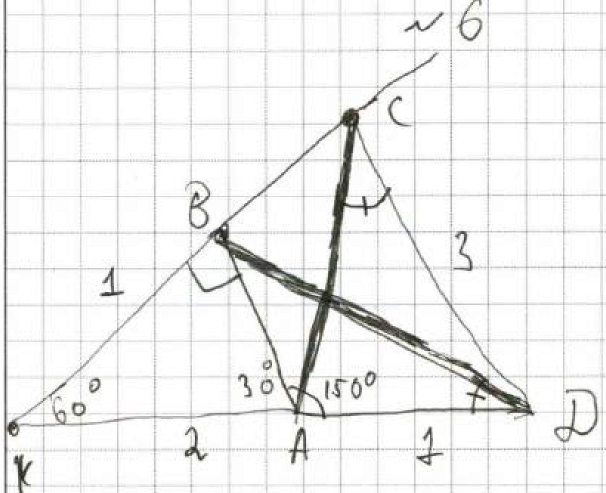
Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс; 41306241 — номер участника; лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№6



Отметим такую точку K, ~~что~~ на луче DA за точку A, что KA = 2

=) △ BDK = △ACD т.к. AC = BD; ∠ ADB = ∠ ACD; KD = AK + AD = 2 + 1 = 3 = CD.

=) ~~KD~~ KB = AD = 1.

∠ KAB - смежный с ∠ BAD =)

∠ KAB = 30°. =) △ KBA - прямоуголь-ный т.к. $\frac{KB}{KA} = \frac{1}{2}$ и угл. напротив KB ~~=30~~ равен 30° =) ∠ KBA = 90° =)

∠ BKD = 60° т.к. △ KBD = △ ~~KA~~ CDA (=)

∠ CDA = 60°, CD = KD =) △ KCD - р/с

=) ∠ DKC = 60° =) луч KB совпадает с лучом KC т.к. ∠ AKB = 60° =)

B ∈ KC т.к. △ KCD - р/с =) KC = 3; KB = 1 =)

= BC = 3-1 Ответ: BC = 2.

№8

~~[illegible]~~ Изначально упорядочим 50 гирь по их весу и дадим им названия $a_1, a_2 \dots a_{50}$, такие что $a_1 > a_2 > a_3 \dots > a_{50}$.

Возьмем набор $a_{25} + a_{26} + \dots + a_{45} = S_1$, a_{46}, a_{48}, a_{50}. (от 25 до 50 кроме a_{47}, a_{49}) их ровно 24. $\Rightarrow$ в сумме они равны кому то, если это набор из 24 или более элементов то их сумма больше или равна $a_{49} + a_{47} + a_{24} + a_{23} \dots + a_3 = S$

т.к. это наименьшие 24 элемента

$a_{49} > a_{50}$; $a_{47} > a_{48}$; $a_{24} > a_{45} \dots$

$a_i > a_{i+21} \Rightarrow$ ~~сумма больше~~ $S > S_1$

$\Rightarrow$ набор из 23 или менее элементов

$\Rightarrow$ ~~для~~ $S_1 \leq a_1 + a_2 \dots + a_{23}$, т.к. это самые большие из 23 элементов.

$\Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_{14} \geq a_{24} + a_{25} + a_{26} \dots + a_{45} + a_{46} + a_{48} + a_{50} >$

$> \underbrace{a_{25}+a_{26}\ldots+a_{46}+a_{47}+a_{48}+a_{50}}_{= S_3}$ т.к.

$a_{24} > a_{47}$ $\Rightarrow$

1° $a_1+a_2\ldots+a_{24} = a_{25}+a_{26}\ldots+a_{50} = S_6$

2° $a_1+a_2\ldots+a_{24} = a_{25}+a_{26}\ldots+a_{49} = S_7$

если ни один из этих вариантов то если 24 или менее элементов то $S_3=a_{25}+a_{26}\ldots+a_{48}+a_{50} >$ ~~…~~, т.к. тут 24 макс. из ост. и $a_{50}>0$, но $S_3 < S_2$ а если из 25 элементов то пусть это S_4, тогда $S_4 = S_3 + a_{49} - a_i$ где i от 25 до 50 если i от 25 до 49, то $S_4 \le \underbrace{S_3 + a_{49} - a_{49}}_{= S_3}$ т.к. $a_i \geq a_{49}$ $\Rightarrow S_4 \le S_3 < S_2 \Rightarrow S_4 \neq S_2$

$\Rightarrow$ $i=50$, это 2°

и если 26 эл. то это 1° $\Rightarrow$

Это все варианты.

1° $a_1+a_2 ..+a_{24} = a_{25}+a_{26}...+a_{50}$ ~~S_6~~

посмотрим на сумму $a_1+a_2..+a_{23}+a_{25} = S_5$

она меньше чем S_6, т.к.

$a_{25} < a_{24}$, а $S_6 < a_{24}+a_{26}+a_{25}...+a_{50}$

т.к. $a_{24} > a_{25}$ => S_5 не равна

сумме оставшихся => она является суммой 24 элементов ($a_{24}+a_{26}+a_{27}...+a_{49}$) т.к.

~~$S_5 > S_3$ т.к. $a_{25} > a_{47}$, а все ост.~~

по аналог. причинам

возьмем сумму $a_{24}+a_{26}+a_{27}...+a_{46}+a_{48}+a_{50}$

она равняется 23 эл. аналогично

=> $a_1+a_1..+a_{23} \geq a_{24}+a_{26}+a_{27}...+a_{46}+a_{48}+a_{50}$

=> $a_1+a_2 ...+a_{23}+a_{25} > a_{24}+a_{26}..+a_{48}+a_{50}$

=> $a_1+a_2..+a_{23}+a_{25} = a_{24}+a_{26}...+a_{49}$

=> $2\cdot(a_{24}-{25}) = a_{50}$

$a_{24}-a_{25} = (a_{50})/2$

аналогично мы можем

сделать что $a_{24}-a_{26} = (a_{50})/2$ =>

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 6 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

=) $a_{26}=a_{25}$, но элементы различны

противоречие.

2° $a_1+a_2 \ldots + a_{24} = a_{25}+a_{26}\ldots+a_{49}$

посмотрим на сумму $a_1+a_2 . a_{23}+a_{25}$ <

она не равна $a_{24}+a_{26}+\ldots+a_{49}$

т.к. $a_{25}<a_{24}$ => из 26 сумма сост. не может

4) $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{25} > a_{26}+a_{27}\ldots+a_{49}$

т.к. слева уменьшилось на $a_{24}-a_{25}$ а справа на $a_{25}-a_{30}$ a_{25}, если

$a_{24}-a_{25} > a_{25}$, то $a_{24} > 2a_{25}$

=) $a_1+a_2\ldots a_{23}+a_{25} > 24\cdot 2\cdot a_{25} = 48a_{25} > a_{26}+a_{27}\ldots+a_{49}$

Но и из 24 не может, т.к. $a_1>a_{24}$,

а $a_{25}>a_{50}$, а все ост макс.

из ост. 46 => она равна сумме

из 25 и не $a_{24}+a_{26}\ldots+a_{49}$ => вид

$a_{24}+a_{26}\ldots+a_{50}-a_i$ где i от 26 до 49.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 7 из 11

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

где i от 25 до 49

$a_1+a_2...+a_{23}+a_i > a_{26}+a_{27}...+a_{50}$ т.к.

$a_1+a_2...+a_{23} \geq a_{25}+a_{26}...+a_{46}+a_{48}+a_{50}$

$a_{25} > a_{47}$; $a_i \geq a_{49}$.

В => $a_1+a_2...+a_{23}+a_i$ где i от 25 до 49.

имеет вид $a_{24}+a_{25}+a_{26}...+a_{50}-a_j-a_i$ где

j от 25 до 49. переберем

все i сумма уменьшается => с каждым

уменьшением i j увеличивается

но у j 25 вар и у i 25 вар.

=> при $i=25$ $j=49$; $i=26$ $j=48$...

=> при $i=49$ $j=25$ если по другому

то будет 2 одинаковых j =>

есть моменты $i=37$ и $j=37$,

но $i \neq j$ т.к. j — это число из

оставшихся => противоречие

=> 2^0 тоже не возможен =>

такого не могло быть.

Ответ: нет, не могло.

№7

Допустим может быть тогда

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)p^2$,

тогда по очереди будем делить каждую скобку на по p (ост от $(abc+1)$ и скобку) и ост от $abc+1$

тоже делить будем тогда в конце останется p^2 (не более 2 мн множителей, но скобок 3 =) одна из скобок ост. 1 не умол общности это $ab+a+1$

и заметим что если перемножить любые 2 скобку не умол. общности

$(ab+a+1)(bc+b+1)=ab^2c+ab^2+ab+b^2ca+ab+a+bc+b+1>abc+1$ =) в двух скобочках 1 не может быть =) $(ab+a+1)$ станет 1, а $bc+b+1$ и $ca+c+1$ станут каждая p, т.к. p^2 на 2 множителя не равных 1 может разложиться только на $p\cdot p$.

(*)

$\Rightarrow abc+1 \;\vdots\; ab+a+1.$ (*)

$ab\,a + (ab+a+1)c \;\vdots\; ab+a+1 \Rightarrow$

$abc+ac+c-abc-1 \;\vdots\; ab+a+1 \Rightarrow$

$ac+c-1 \;\vdots\; ab+a+1 \Rightarrow$

$(ac+c+1,\ ab+a+1) \le 2$, но

если НОД $= 2$, то

$ac+c+1 \;\vdots\; 2$ и $ab+a+1 \;\vdots\; 2$

если $a \;\vdots\; 2$ то $ab+a+1 \not\vdots\; 2$

$\Rightarrow a \not\vdots\; 2$, аналог. $c \not\vdots\; 2 \Rightarrow ac+c+1 \not\vdots\; 2$

$\Rightarrow (ac+c+1,\ ab+a+1) = 1$

~~если a, b, c — неч. то $abc+1 \;\vdots\; 2$,~~

~~а $ab+a+1 \not\vdots\; 2$; все в скобки~~

~~не $\vdots\; 2$ т.к. 3 слагаемых неч.~~

~~$\Rightarrow$ а или b или c — четные~~

~~$\Rightarrow$ произведение этих скобок~~

~~нечетно, и причём $abc+1 \;\vdots\; 2 \Rightarrow$~~

~~против $\Rightarrow$ a или b или c — четно.~~

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 10 из 10

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

1° $a \vdots 2 \Rightarrow$ $ca+a+1$ если $c \vdots 2$ то

$ca+c+1 \;\vdots\; 2$ но $abc+1 \not\vdots\; 2 \Rightarrow p=2$,

но

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \geq$

$3\sqrt{a^2b} \cdot 3\sqrt{b^2c} \cdot 3\sqrt{c^2a} = 27abc$

$abc+1 \leq 2 \cdot abc \Rightarrow p^2 \geq \frac{27abc}{2 \cdot abc} = \frac{27}{2} =$

$= 13{,}5 \Rightarrow p \geq 3 \Rightarrow p \geq 5 \Rightarrow p \neq 2 \Rightarrow$

$c \vdots 2 \Rightarrow bc+b+1 \vdots 2$ если $b \vdots 2$

$\Rightarrow b \vdots 2$

$ca+c+1 \underset{p}{\equiv} 0$ и $bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0$

$\Rightarrow ca+c \underset{p}{\equiv} -1$; $bc \underset{p}{\equiv} -b-1 \Rightarrow$

$(ca+c)(-b-1) \equiv -1 \cdot bc$

$-abc-bc-ca-c \equiv -bc$

$\rightarrow abc+ac+c \underset{p}{\equiv} 0$

$ac+c \equiv -1 \Rightarrow abc-1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306241 — номер участника

лист 4 из 11

$\Rightarrow$ $abc \geq p$, и если докажем что $abc \geq p^2$, то

$S = (ab + a + 1)(bc + b + 1)(ca + c + 1)$ есть $a^2b^2c^2$ и $3abc$ а также $1 \Rightarrow$

$S \geq (abc + 1)^2 = a^2b^2c^2 + 2abc + 1$

$\Rightarrow$ ~~$(ab+a+1)$~~ bc $S \geq (abc + 1)^2$

$\geq (abc + 1)\, p^2 \Rightarrow$ равенства нет, ч.т.д.

~~Нужно доказать что~~

$abc + 1 \vdots ab + a + 1$, заметим что

$(ab + a + 1) \cdot c \geq abc + 1 \Rightarrow$

$\frac{abc+1}{ab+a+1} < c \Rightarrow$

$(bc + b + 1)(ca + c + 1) < c \cdot p^2$

А дальше?