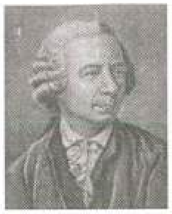


8

Технический лист
День 1

## Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 28
аудитория – посадочное место

41306262
номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [V] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [V] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [V] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

| 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| + ЕЗ | + ЕМ | + И.Б. | — МК | |
| 7 АЮ | 7 ОЛ | 7 МС | 0 АБ | 21 |
| | | | | |

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 41306262

класс номер участника лист 1 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1 Ответ: 4, от противного

Пусть можно максимум

всего у нас возможно 5 „k": {2; 3; 4; 5; 6}

тогда n представимо в виде:

$n = a + (a+1) = b + (b+1) + (b+2) = c + (c+1) + (c+2) + (c+3) =$

$= d + (d+1) + (d+2) + (d+3) + (d+4) = e + (e+1) + (e+2) + (e+3) + (e+4) + (e+5)$

это можно записать так:

$n = 2a+1 = 3b+3 = 4c+6 = 5d+10 = 6e+15$

=) у нас $n = 2a+1 = 4c+6$ а такого быть не может. т.к. число либо четное либо нечетное но не все вместе

тогда максимум 4 „k"

пример: $n = 105 = 52+53 = 34+35+36 = 19+20+21+22+23 =$

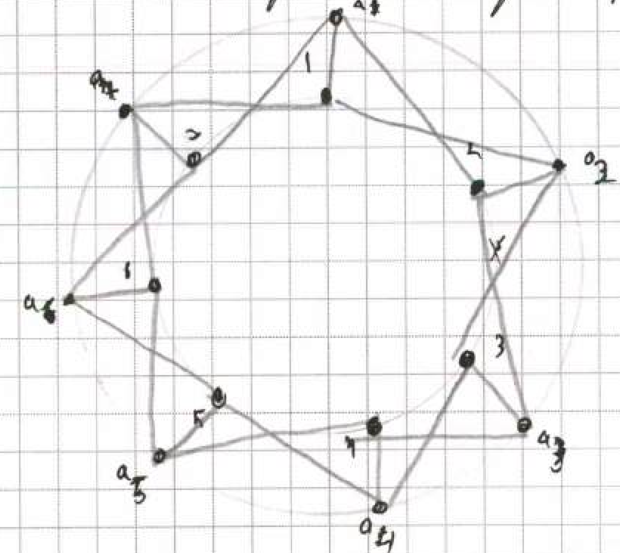
$= 15+16+17+18+19+20$

т.е. у нас работает для $k = \{2; 3; 5; 6\}$

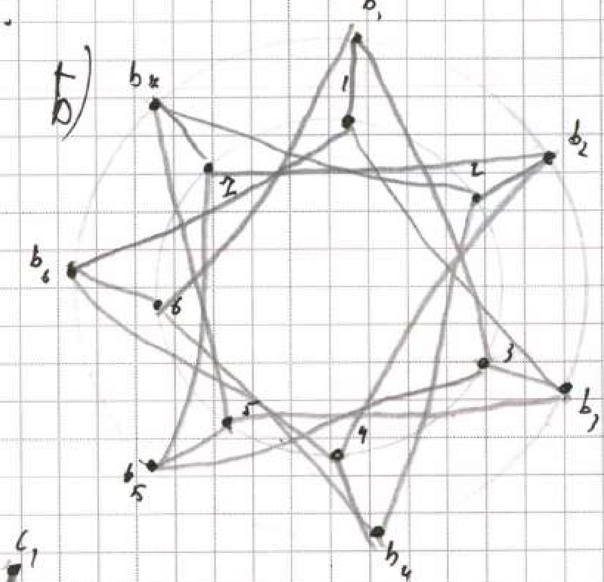
№ 2

Ответ: 21 ученик пример:

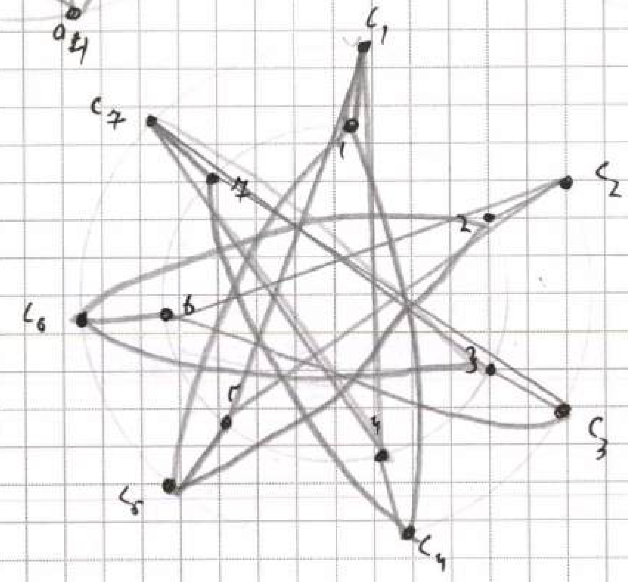
а)



б)



с)



пример верный

во внутреннем круге – кружки во внешнем ученики
(кружки одни и те же а ученики разные
тогда для любой пары соседних в круге
будут 2 или человека из группы ~~а~~ а
и 1 из группы в

для ~~кружков~~ кружков ("для подряд") через 1: например 1 и 3 : 1 из а ($a_2$) и 2 из b ($b_1$; $b_3$)

для кружков через 2) например 1 и 4 : 1 из b ($b_6$) и 2 из c ($c_1$; $c_4$)
в скобках для данного примера

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306262 — номер участника

лист 3 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2 продолжение 1 пример тогда работает. у каждого ученика ровно 3 кружка и для каждой пары кружков ровно 3 человека

Оценка: с одной стороны пар кружков $C_7^2$

с другой: при $n$ человек и $x$ кружках на которые ходят то : $C_x^2$ — во скольких парах кружков участвует 1 человек =)

=) $n \cdot C_x^2$ — сколько раз всего ученики участвуют в парах

$\frac{n C_x^2}{3}$ — сколько пар т.к. в каждой паре 3 участника

⇓

$$C_7^2 = \frac{n C_x^2}{3}$$

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 3}{\cancel{2}} = n \cdot \frac{x(x-1)}{\cancel{2}}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 3 = n \cdot x \cdot (x-1)$$

нам по условию дано: → $59 \geq n \geq 7$ $n; x \in N$

$7 \geq x \geq 2$

тогда $x(x-1)$ — четное

⇓

$n$ — нечетн $> 6$ =)

=) $n = \{7; 21; 63; 9\}$

если $n = 7$

$x \cdot (x-1) = 18$ — не может быть

если $n = 21$

$x \cdot (x-1) = 6$ =) $x = 3$

если $n = 63$ то не усл. т.к. $n \leq 59$

если $n = 9$

то $x(x-1) = 14$ — не может

⇓

у нас только 1 вариант, когда $n = 21$, пример приведен выше, всё!

№3

посмотрим на: $a+b+c = c^2+b^2+a^2$

$a^2-a+b^2-b+c^2-c=0$

$b^2-b=b^2-b+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

$=(b-0{,}5)^2-\frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$

аналог: $c^2-c \geq -\frac{1}{4}$

$a^2-a = -(b^2-b+c^2-c)$

$a^2-a \leq \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\boxed{a^2-a \leq \frac{1}{2}}$

тогда

$(a-0{,}5)^2 \leq \frac{3}{4}$

$a \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} < 1{,}5$

$\boxed{a<1{,}5}$

для $b$ и $c$ аналог.

докажем что:

Тогда ~~если выз~~

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{1}{a+b+c+1}$$

$(a-1)^2\cdot(a+b+c+1) \leq (b+c+1)$

$(a^2-2a+1)(a+b+c+1) \leq b+c+1$

$a^3+a^2b+a^2c+a^2+a+\cancel{b}+\cancel{c}+\cancel{1}-2a^2-2ab-2ac-2a \leq \cancel{b}+\cancel{c}+\cancel{1}$

$a^3+a^2+a^2b+a^2c+a \leq 2a^2+2a+2ab+2ac$

$a^3+a^2b+a^2c \leq a^2+a+2ab+2ac$

$a^3-a^2 \leq a(b(2-a)+c(2-a)+1)$

№ 3 (продолж)

$a^3 - a^2 \le a(b(2-a) + c(2-a) + 1)$

1сл) $a = 0$

тогда $0 \le 0$
нер-во выполн

2сл) $a \ne 0$

$a^2 - a \le (b+c)(2-a) + 1$

$a^2 - a \le 0{,}5 \le 1 \le (b+c)(2-a) + 1$

все выполняется

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$$

аналог;

$$\frac{(b-1)^2}{a+c+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$$

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{1}{a+b+c+1}$$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{a+b+c+1}$$

(ЧТД)

№4

Ответ: 2

Пример: правильная 1000-конечная звезда так чтобы угол между ~~~~ соседними звеньями был угол $\frac{360}{1000}^\circ$
тогда у нас будет у каждого = 2 пересечения

Оценка: пусть можно больше, разделим все звенья на группы: $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$ группы так чтобы кол-во зв $a_i \perp b_i$ внутри ~~~~ все ∥ тогда, поскольку у нас звенья между собой равны, а также групп четное число, i.e. у нас групп будет $\geq 500 \Rightarrow$ всего $\leq 2$ ~~~~ звена пр. в группке $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ max „2" ~~~~ $\Rightarrow$ ответ: **2**



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

## Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 2В
аудитория – посадочное место

41306262
номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

| 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| +ПР V | + КН | −. А.М. | − ИЮ. | |
| 7ПД | 7 РУ | 1 КН | 0 МК | 15 |
| | | | | |

№5

Посмотрим на квадрат $2\times2$ в нем стоит $\leq 1$ короля

тогда разобьем на 225 непересек. квадратов $2\times2$ доску $30\times30$

тогда в $9\times9$ у нас будет ровно 16 квадратов $2\times2$,

поскольку всего квадратов 225 и королей 220 то будет ровно 5 свободных квадратов $\Rightarrow$ $\geq 11$ квадратов в $9\times9$ будет занято $\Rightarrow$ $\geq 11$ королей (ЧТД)

№6

Дано: ABCD – выпукл.

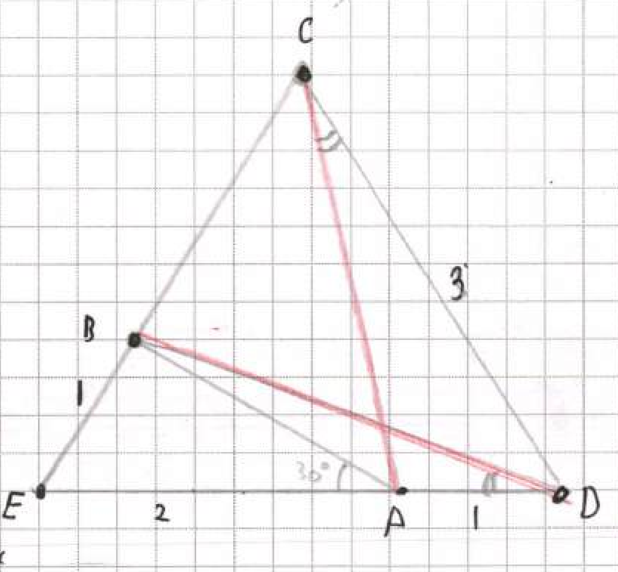
$BD = AC$

$\angle BDA = \angle ACD$

$CD = 3$ $AD = 1$

$\angle BAD = 150^\circ$

Найти BC




Решение:

продлим DA до точки E, так чтобы $ED = CD = 3$

тогда $\triangle EBD = \triangle DAC$ по I призн: $CA = BD$, $CD = DC$, $\angle ACD = \angle ADB$

$\Rightarrow EB = 1$ $EA = 2$, тогда $\angle BAE$ – смежн. $\angle BAD = 150^\circ$

$\angle BAE = 30^\circ$

тогда $\angle EBA = 90^\circ$, т.к. $\angle EAB = \angle 30^\circ$ ~~напротив стороны в 2 раза меньшей~~ и отнош $\frac{EB}{EA} = \frac{1}{2}$

$\angle BED = 60^\circ = \angle ADC$ и т.к. $ED = CD$ то $\triangle ECD$ – равност. и $\angle EDC = 60^\circ$

(обозн. на одной прямой)

$\Rightarrow$ E – B – C | $EC = 3$ $\Rightarrow$ $BC = 2$

Ответ: 2

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306262 — номер участника

лист 2 из 5

№7

Ответ: нет

пусть это правда, тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = p^2(abc+1)$

тогда заметим что для любых 2-х скобок произв. вида $(ab+a+1)$ больше чем $(abc+1)$ т.к. иначе 1 скобка $\vdots p^2$ а ост $\leq (abc+1)$ ⇒ у нас 2 скобки $\vdots p$

так же $ab+a+1 \equiv_a 1$

$abc+1 \equiv_a 1$

⇓

$(bc+b+1)(ca+c+1) \equiv_a p^2$

аналог.:

$(ab+a+1)(bc+b+1) \equiv_c p^2$

$(ab+a+1)(bc+b+1) \equiv_b p^2$

ещё $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \equiv_{abc} p^2 \equiv_{abc} p^2(abc+1)$

обозначим $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = m$

$p^2 \equiv_a m$

$p^2 \equiv_b m$

$p^2 \equiv_c m$

$p^2 \equiv_{abc} m$

⇓ $p^2 = m + abc \cdot x$ $x \in \mathbb{Z}$

при этом $p^2 = \frac{m}{(abc+1)}$

$\frac{m}{abc+1} = m + abc\,x$

№7 (продолжение)

$\frac{m}{abc+1} = \frac{(abc+1)m + (abc)^2x + abcx}{abc+1}$

$(abc-m)+(abc)^2x+abcx=0$

~~$abc(\ldots abc+1)=0$ т.к. $a,b,c \in N$~~

~~$x=0$~~

~~$\Downarrow$~~

~~$p^2=m \Rightarrow abc+1=1$ ⨯ $\Rightarrow$ не может.~~

$m+abcx+x$

$abc(m+abcx+abc)=0$

$m=abc(1-x)$

$\Downarrow$

$p^2=abc$

$\Downarrow$

$a \vee b \vee c = 1$,

докажем тогда что $a, b, c$ – чётные

если все нечет, то $abc+1$ – четн, а $m \not\vdots 2$ ⨯

$\Rightarrow$ есть четное, БОО (!) тогда

$bc+b+1 \not\vdots 2$

$b+1 \not\vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$

тогда $ab+a+1 \not\vdots 2$ — т.к. $= p^2 \cdot (abc+1)$

$a+1 \not\vdots 2$

$a \vdots 2 \Rightarrow$ все кратны 2 ✓

$\Downarrow$ ?

не может.

№8

Ответ: нет, от противного:

пусть есть набор гирек, если там есть ненатуральные числа то мы можем все числа домножить на 4x и от этого ничего не поменяется, (все продолжит работать т.к. обе части увел. в один. число раз в каждом урав-нии, если же там будут ~~[illegible]~~ иррациональные числа то, ~~посмотрим на обходную сумму~~, ~~если оно рациональна то возьмем иррац. сумму~~, либо иррац > рацион, тогда берем все рациональные ~~[illegible]~~, если не наоборот то домножим на иррац. число и получим 1 случ.

если же все иррац. то делим на наим иррац и уже получ 1 раз.

если же все рациональные то домножим на x, так чтобы все веса стали натуральными и НОД = 1 и упорядочим их

— Так не всегда возможно.

$1 \le a_1 \le a_2 \le \dots a_{50}$

тогда посмотрим на ~~набор простых~~ чисел такое число, которое дает ~~[illegible]~~ остаток невзаимно прост. с числом все числа кроме ~~[illegible]~~ $X = (a_1 a_2 \dots a_{50}) / a_i$ тогда т.к. все числа отличаются то у каждого будет остаток невзаимно простой с $X$, а 1 число будет

контрпр. нет

№8 (продолжение)

Тогда мы возьмем гирьку $a_i$ и 23 рандомных гирек и у него будет остаток взаимопростой с X, а у остальных невзаимопрост => мы получили набор который нельзя уравновесить. (ЧТД)