Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 58 7_{KA}

(1) Так как пятерки ставятся только за $k = 2, 3, 4, 5, 6,$ то пятерок ≤ 5.

Пример на 4 пятерки

~~Пусть~~ $n = 45$

~~15 = 7+8~~ Тогда $n = 22+23 \to$ за $k=2$

~~15 = 4+5+6~~ $n = 14+15+16 \to$ за $k=3$

~~15~~ $n = 7+8+9+10+11 \to$ за $k=5$

$n = 5+6+7+8+9+10 \to$ за $k=6$

Докажем, что получить пятерки за 5 чисел из $\{2,3,4,5,6\}$ (то есть за каждое k) Вася не мог. ~~Пусть~~ От противного.

~~Пусть~~ Тогда есть число N, предстовимое как в виде суммы 2 посл. натур. чисел, и как сумма 4 посл. натур. чисел.

Тогда $N = a + (a+1) = 2a + 1 \not\vdots 2$

$N = b + (b+1) + (b+2) + (b+3) = 4b + 6 \vdots 2$

Тогда N и четно, и нечетно (?!)

Ответ: 4

7 кл5

(2) Пусть всего учеников n, а каждый ученик ходит в m кружков.

~~Давайте посчитаем количество пар~~

Пронумеруем учеников числами от 1 до n. Тогда кружок — некоторое множество этих чисел. Посчитаем количество пар „число - число", где эти числа равны и находятся в разных множествах. (Т.е., например, если число 1 встречается в 1-м, 2-м и 3-м кружках), то таких пар будет 3 — пара „1 из 1-го кружка, 1 из 2-го кружка", пара „1 из 1-го кружка, 1 из 3-го кружка", и пара „1 из 2-го кружка, 1 из 3-го кружка").

Заметим, что для каждого числа таких пар с ним $\frac{m(m-1)}{2}$, так как $\forall$ число равно в m множествах.

Тогда суммарное кол-во пар — $\frac{nm(m-1)}{2}$. С другой стороны, для каждой пары кружков таких пар по условию 3 (а пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2}=21$), тогда

$\frac{nm(m-1)}{2} = 3\cdot 21 = 63 \Rightarrow$

$nm(m-1) = 126$, $7 \le n \le 59$, $1 \le m \le 7$.

1. $m = 1 \Rightarrow 0 = 126$ (x)
2. $m = 2 \Rightarrow 2n = 126 \Rightarrow n > 60$ (x)
3. $m = 3 \Rightarrow 6n = 126 \Rightarrow n = 21$.
4. $m = 4 \Rightarrow 12n = 126$ невозможно, т.к. $126 \not\vdots 12$
5. $m = 5 \Rightarrow 20n = 126$ невозможно, т.к. $126 \not\vdots 20$
6. $m = 6 \Rightarrow 30n = 126$ невозможно, т.к. $126 \not\vdots 30$
7. $m = 7 \Rightarrow 42n = 126 \Rightarrow n = 3 < 6$ — невозможно

Задача № 2 Лист 2 из 2 Номер участника: 58

Тогда в классе ~~либо 18~~ 21 ученик.

~~Пример:~~

~~Кружок~~	~~№ ученики~~
~~1~~	~~1 2 3, 16, 17, 18, 19, 20, 21~~
~~2~~	~~1 2 3 4 5 6 19 20 21~~
~~3~~	~~1 2 3 4 5 6 7 8 9~~
~~4~~	~~4 5 6 7 8 9 10 11 12~~
~~5~~	~~7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15~~
~~6~~	~~10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18~~
~~7~~	~~13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21~~

~~Ответ: 21~~

~~Каждый ходит в 3 кружка, и у любых 2 кружков пересечение имеет 3 эл-та~~

Пример Разобьем учеников на 7 групп по 3 ученика. Назовем их А, Б, В, Г, Д, Е, Ж.

Тогда пример выполняет так:

	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж
1	✓	✓	✓				
2			✓	✓	✓		
3		✓		✓		✓	
4	✓			✓			✓
5		✓			✓		✓
6			✓			✓	✓
7	✓				✓	✓	

Галочка означает, что все люди из соотв. группы ходят в соотв. кружок, отсутствие – что никто не ходит.

Тогда любые 2 кружка пересекаются ровно по 1 группе, и все ученики ходят в 3 кружка => усл-е выполнено

Ответ: 21 ученик

Задача № 3 Лист 1 из 2 Номер участника: 58

7 TA

(3) ~~Заметим~~

По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратичном для 3 чисел

$S = a+b+c = a^2+b^2+c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{S^2}{3} \Rightarrow 3S \geq S^2 \Rightarrow \underline{S \leq 3}$

нтп

Заметим, что

$a^2-a = (b-b^2)+(c-c^2) \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, т.к.

$b-b^2 \leq \frac{1}{4}$ для $\forall b \in \mathbb{R}$, т.к. $b^2-b+\frac{1}{4} = (b-\frac{1}{2})^2 \geq 0$ (и так же для c)

Тогда $a^2-a-\frac{1}{2} \leq 0$. Аналогично $b^2-b-\frac{1}{2} \leq 0$ и

$c^2-c-\frac{1}{2} \leq 0$. (В частности, $a, b, c \leq 2$, т.к. $x \geq 2 \Rightarrow x^2-x \geq 2$)

Докажем неравенство

$(*)\ \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{1}{1+a+b+c}$ Пусть $b+c+1 = t$, $t \geq 1$

Тогда $(*) \Leftrightarrow$

$\frac{(a-1)^2}{t} \leq \frac{1}{a+t} \Leftrightarrow$

$(a^2-2a+1)(a+t) \leq t \Leftrightarrow$

~~$a^3+a^2t-2a-2at+1+t \leq t$~~ $\Leftrightarrow$

$a^3+a^2t-2a^2-2at+a+t \leq t \Leftrightarrow$

$a^3+a^2t-2a^2-2at+a \leq 0 \Leftrightarrow$

$(\star)\ a(a^2+at-2a-2t+1) \leq 0.$

Заметим, что

$a^2+at-2a-2t+1 = (a-1)^2 - t(2-a) \leq (a-1)^2-(2-a) =$ (т.к. $2-a \geq 0$ и $t \geq 1$)

$a^2-a-1 \leq 0$

т.к. $a^2-a-\frac{1}{2} \leq 0$

Тогда $(\star)$ верно, т.к. произведение неположительной и неотрицательной скобки неположительно

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 2 из 2 Номер участника: 58

Итак, (*) доказано. Складывая аналогичные нер-ва

$\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le \frac{1}{1+a+b+c}$ и $\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{1}{1+a+b+c}$ со (*),

получаем требуемое.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 58

(4) Рассмотрим граф, в котором вершины — это звенья, а ребра ~~-~~ проводятся, если соответствующие 2 звена пересекаются и перпендикулярны (ребра между соседними перпендикулярными звеньями не проводим). Пусть в этом графе есть нечетный цикл: $l_1 \perp l_2 \perp l_3 \ldots \perp l_{2n+1} \perp l_1$. Так как $l_1 \perp l_2 \perp l_3$, то $l_1 \parallel l_3$. Аналогично $l_3 \parallel l_5, \ldots l_{2n-1} \parallel l_{2n+1}$ $\Rightarrow l_1 \parallel l_{2n+1} \perp l_1$. Противоречие.

Тогда в построенном графе нет нечетных циклов, тогда он двудольный. В нем, очевидно, одна из долей содержит ≤ 500 вершин $\Rightarrow$ у вершин из другой доли степень $\leq 500 \Rightarrow k \leq 500$.

Если $k = 500$, то рассмотрим 2 соседних звена. ~~Если~~ Тогда каждое пересекает ≥ 500 под прямым углом, при этом одно и то же звено не может пересекать оба из них под прямым углом $\Rightarrow$ звеньев $\geq 2 + 2 \cdot 500 > 1000$ (?!)

Тогда $k \leq 499$.

$0_{НФС}$ $\frac{}{AG}$

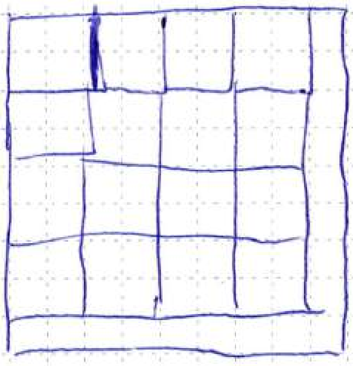
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 58

(5) Разобьем доску на квадраты 2x2 (~~Такая~~ так можно, ибо 30 четно). В каждом квадрате ≤ 1 короля (иначе, если стоят ≥ 2 короля, то они бьют друг друга). Всего квадратов $30^2/4 = 225$. Тогда в 220 из квадратов стоит 1 король, а в еще 5 квадратах королей не стоит.

~~Разобьем~~

Рассмотрим произвольный квадрат ~~8x8~~ 9x9.



Выделим в нем ~~8~~ 16 квадратов 2x2 так как на рисунке. а если не совпало с разбиением?

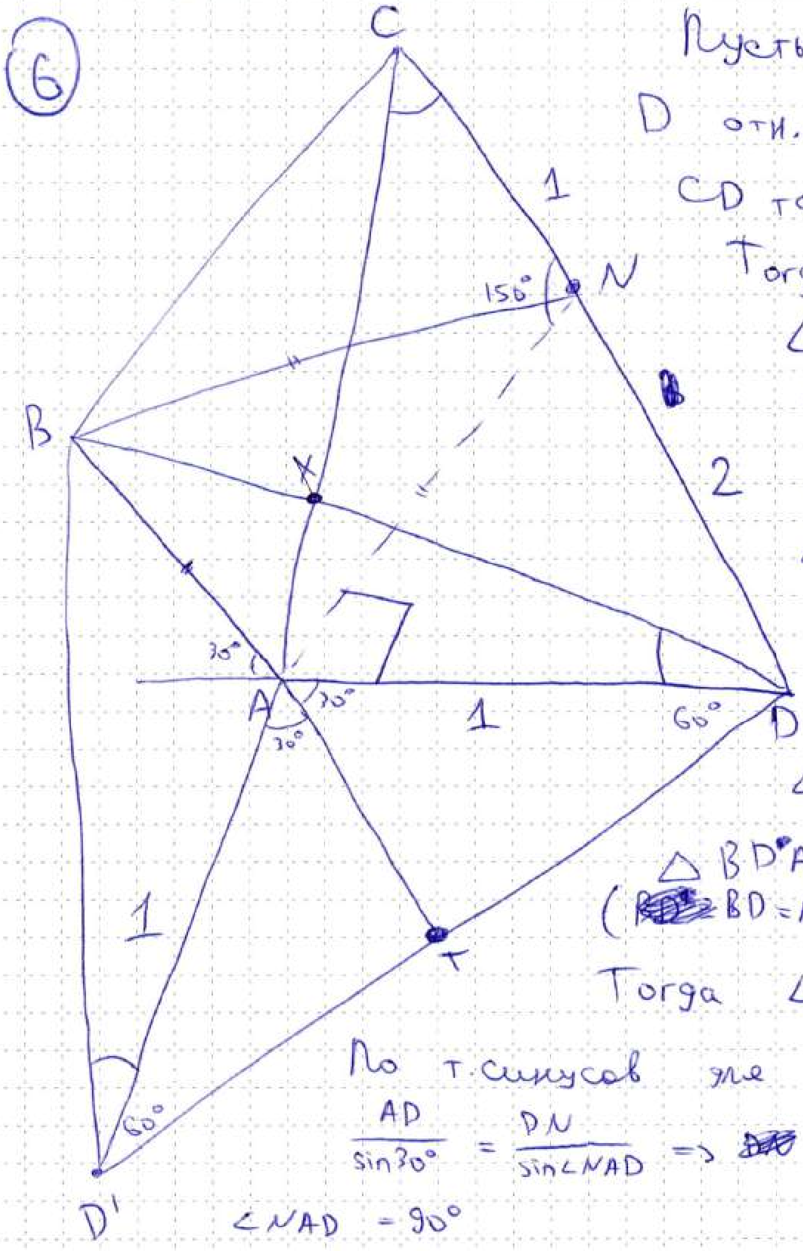
Из них по доказанному ранее пустых ≤ 5, а тогда королей в них не менее $16-5=11$, ч.т.д.

у!?м

4АG

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 58

5+c 7+A



Пусть D' — точка, симметричная D отн. AB, N — точка на отрезке CD такая, что $CN = 1 \Rightarrow ND = 2$

Тогда $AD' = AD = 1$ по симметрии

$\angle ADB = \angle AD'B$ по симметрии

$T = BA \cap DD'$

$\angle DAT = 180° - 150° = 30°$

$\angle DAT = \angle D'AT$ по симметрии.

Тогда $\angle DAD' = 60° \Rightarrow \triangle DAD'$ — р/ст $\Rightarrow$

$\angle ADD' = \angle AD'D = 60°$

$\triangle BD'A = \triangle ACN$ по I пр.

($BD = AC$, $AD' = CN$, $\angle BD'A = \angle ACN$)

Тогда $\angle CNA = \angle BAD' = 150° \Rightarrow \angle ANP = 30°$

По т. синусов для $\triangle AND$:

$\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{DN}{\sin \angle NAD} \Rightarrow \sin \angle NAD = \frac{DN}{AD} \cdot \sin 30° = 1 \Rightarrow$

$\angle NAD = 90°$

Из $\triangle ACN = \triangle BDA$ $AB = AN$. Т. Пифагора для $\triangle AND$:

$2^2 = 1^2 + AN^2 \Rightarrow AN = \sqrt{3}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \overset{\shortparallel}{AB}$

$\triangle BAN$ — р/б с углом $60°$, т.к. $\angle BAN = 180° - 30° - 90° = 60° \Rightarrow$

Он р/ст $\Rightarrow BN = \sqrt{3}$. $\angle CNB = \angle CNA - \angle BNA = 150° - 60° = 90°$.

По т. Пифагора для $\triangle BNC$: $BC^2 = BN^2 + CN^2 = 4 \Rightarrow$

$BC = 2$.

Ответ: 2

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 1 Номер участника: 58

(7) Предположим противное: пусть для $p \in \mathbb{P}$

$$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)p^2. \qquad (*)$$

Заметим, что

$(bc+b+1)(ca+c+1) > abc+1 \Rightarrow ab+a+1 < p^2$. Аналогично $bc+b+1 < p^2$, $ca+c+1 < p^2$. Тогда ни один из трех сомножителей не делится на p^2 $\Rightarrow$ какие-то 2 из них делятся на p.

1° $p = 2$

Тогда

$3 \le \overset{1}{\overset{\wedge}{ab}} + \overset{1}{\hat{a}} + \overset{1}{\overset{\wedge}{1}} < p^2 = 4 \Rightarrow a = b = 1$ $\qquad$ $a = b = c = 1$ не подх,

$3 \le \underset{1}{\underset{\vee}{bc}} + \underset{1}{\underset{\vee}{b}} + \underset{1}{\underset{\vee}{1}} < p^2 = 4 \Rightarrow b = c = 1$ $\qquad$ т.к. $27 \not\vdots 2$.

2° $p > 2 \Rightarrow p \not\vdots 2$

НУО $\begin{matrix} ab+a+1 \vdots p \\ bc+b+1 \vdots p \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a(b+1) \underset{p}{\equiv} -1 \\ b(c+1) \underset{p}{\equiv} -1 \end{matrix}$ $\quad$ $b \not\vdots p$, т.к. иначе $0 \underset{p}{\equiv} bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 1$ (?!)

Перемножим:

$ab(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} 1.$

Но $(b+1)(c+1) \underset{p}{\equiv} bc+b+c+1 \underset{p}{\equiv} (bc+b+1)+c \underset{p}{\equiv} c \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \underset{p}{\equiv} 1.$

Тогда $b(ca+c+1) \underset{p}{\equiv} bc+b+abc \underset{p}{\equiv} bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0$. Тогда, левая часть $(*)$ делится на p^3, а правая — нет (так как $abc+1 \underset{p}{\equiv} 2 \not\vdots p$)

Противоречие.

Ответ: нет

$\overline{\text{у}|\text{м}}$ $\quad$ 7 ИП

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 58

(8) Ответ: да

— Сб

Подберем такие числа a, в, что подходит набор $a+в, a+2в, \ldots a+50в$.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!