Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 25
аудитория – посадочное место

41306282
номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ИГ	+	Ø МК	
7 ЕЗ	7 4D	7 МС	Ø АБ	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 1 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1

У нас есть всего 5 вариантов каким может быть K: 2, 3, 4, 5, 6. Также если n 2-хорошее, то n можно представить как $m + m + 1 = 2m + 1 \Rightarrow n$ - нечет.

При этом если n 4-хорошее, то n можно представить как $m_2 + m_2 + 1 + m_2 + 2 + m_2 + 3 = 4m_2 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n$ - четное и значит n не может быть сразу и 2-хорошим и 4-хорошим $\Rightarrow$ таких K максимум 4 и Вася получит максимум 4 пятерки.

При этом Вася может назвать 45 и тогда

$45 = 22 + 23$ $(K = 2)$

$45 = 14 + 15 + 16$ $(K = 3)$

$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ $(K = 5)$

$45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ $(K = 6)$

И тогда Вася получит 4 пятерки и это максимум.

Ответ: 4

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2

~~Назовём пересечениями для два случая~~

~~Пусть~~ ~~Так как для~~

Так как для двух любых кружков есть три школьника которые ходят в эти 2 кружка, то будем называть пересечениями место сразу в двух ~~ку~~ кружках. Тогда пересечений будет $\frac{7\cdot6}{2}\cdot3=63$ (сколько способов ~~взя~~ взять 2 любых кружка умножить на 3).

Если каждый школьника ходит в 7 кружков то он ходит в $\frac{7\cdot6}{2}=21$ пересечение $\Rightarrow$ школьников 3 ✗.

Если в 6 кружков то в $\frac{6\cdot5}{2}=15$ пересечений и школьников нецелое кол-во ✗

Если в 5 то в $\frac{5\cdot4}{2}=10$ пересечений и школьников нецелое кол-во ✗

Если в 4 то в $\frac{4\cdot3}{2}=6$ пересечений и их нецелое кол-во ✗

Если в 3 то в $\frac{3\cdot2}{2}=3$ пересечения и школьников 21.

Если в 2 то в $\frac{2\cdot1}{2}=1$ пересение и школьников 63 ✗

В один кружок каждый школьник ходить не может.

(Мы считали кол-во пересечений для школьков смотря сколько способов взять 2 ~~из~~ любых кружка в которые этот школьник ходит)

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 3 из 4

№2 (продолжение)

Тогда в классе может быть только 21 школьник.

Тогда первая тройка будет ходить в кружки 1, 2, 3

Вторая тройка будет ходить в кружки 1, 4, 5

Третья в кружки 1, 6, 7

Четвертая в кружки 2, 4, 7

Пятая ~~т~~тройка в кружки 3, 5, ~~6~~7

Шестая в кружки 3, 4, 6

И седьмая в ~~кр~~ кружки 2, 5, 6

~~Ответ~~ Тогда 21 единственный ответ и он подходит.

Ответ: 21

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 4 из 4

№3

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

$$\frac{\frac{(a-1)^2a}{b+c+1}+\frac{(a-1)^2(b+c+1)}{b+c+1}}{a+b+c+1}+\frac{\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+\frac{(b-1)^2(c+a+1)}{c+a+1}}{a+b+c+1}+\frac{\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}+\frac{(c-1)^2(a+b+1)}{a+b+1}}{a+b+c+1}\le\frac{3}{1+\cancel{b}+a+b+c}\quad\Big|\cdot(a+b+c+1)$$

$$\frac{(a-1)^2a}{a+b+1}+(a-1)^2+\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+(b-1)^2+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}+(c-1)^2\le 3$$

$$\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}+\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\le 3-a^2+2a-1-b^2+2b-1-c^2+2c-1$$

$$\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}+\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\le 2a+2b+2c-a^2-b^2-c^2$$

$$\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}+\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\le a+b+c$$

Докажем что $\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}\le a$

$$\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}-a\le 0$$

$$\frac{a((a-1)^2-c-b-1)}{c+b+1}\le 0$$

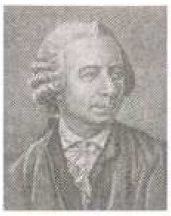
$$\frac{a(a^2-2a+1-c-b-1)}{c+b+1}\le 0$$

$$\frac{a(a^2-2a-c-b)}{c+b+1}\le 0$$

$\frac{a(-a-b^2-c^2)}{c+b+1}\le 0$ т.к. $a\ge 0$, $c+b+1>0$ и $-a-b^2-c^2\le 0$ и тогда т.к. $\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}\le a$ аналогично $\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}\le b$, и $\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\le c$, то

$$\frac{(a-1)^2a}{c+b+1}+\frac{(b-1)^2b}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2c}{a+b+1}\le a+b+c$$

ч. т. д.



8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 26
аудитория – посадочное место

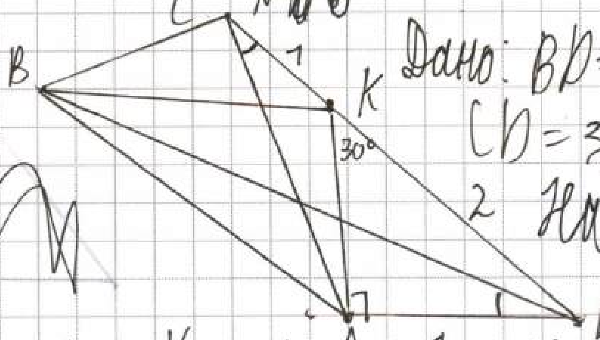
41306282
номер участника

5	6	7	8	Σ
+пр	+ МС	+ЧД	+ КА	
7мг	7 рх	7пр	+кю	28
			7 мк	

№5

~~Раз~~ Разобьем доску на 25 квадратиков 2×2. В каждом квадратике 2×2 может быть максимум 1 король => в 20 квадратиках будет король => в 5 квадратиках короля не будет. Заметим, что в квадрат 9×9 полностью попадает 16 квадратиков 2×2 и короля не будет максимум в пяти квадратиках => в минимум 11 квадратиках 2×2 король будет => в квадрате 9×9 будет минимум 11 королей. ч. т. д.

№6



Дано: $BD = AC$; $\angle ADB = \angle ACD$; $CD = 3$; $AD = 1$; $\angle BAD = 150°$

Найти: BC

Решение: отметим на CD точку K так, что $CK = 1$.

Тогда $KC = AD$, $\angle BDA = \angle KCA$, $BD = AC$ $\Big\}$ $\Delta ACK = \Delta BDA$ (по I призн.)

$BA = AK$ (как соот. эл.)

$\angle CKA = \angle DAB = 150°$ (как соот. эл.)

~~$\angle AKD = 30°$ (т.к. смеж с $\angle CKA$), $KD : AD = 2$ (по св. Δ пр. Δ с $\angle 30°$) ΔAKA $\angle KAD = 90°$ $\angle KDA = 60°$~~

ΔKAD: $\angle AKD = 30°$

(по теор. синусов) $\frac{AD}{\sin 30°} = \frac{KD}{\sin(\angle KAD)} \Rightarrow \frac{1}{0,5} = \frac{2}{\sin(\angle KAD)} \Rightarrow \sin(\angle KAD) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAD = 90° \Rightarrow \angle KDA = 60° \Rightarrow KA = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ (по теор Пифагора)

$\angle BAK = 150° - 90° = 60°$; $KA = BA$ $\Big\}$ ΔBAK – р/с

$KA = BA$

$BK = KA = \sqrt{3}$ $\angle BKC = \angle CKA - \angle BKA = 150° - 60° = 90°$

$BC = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ (по теор Пифагора)

Ответ: 2

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 3 из 6

№8

Пронумеруем все гири по убыванию веса.
Сначала выберем гири 1 ... 12 и 25 ... 36.
~~Гири~~ Эти 24 гири тяжелее чем любые 24 гири
из оставшихся ~~т~~ (1 ... 12 > 13 ... 24 и 25 ... 36 > 37 ... 48)
и значит нам ~~котор~~ потребуется минимум
25 гирь из оставшихся, чтобы они ~~б~~ были
такого же веса, назовем вес гири, которые мы не
выбрали g (~~...~~ возможно нам пришлось
взвешивать все гири для уравновешивания 24, и тогда
$g=0$). Тогда $\frac{S-g}{2} = n$, где S - вес всех гирь, а
n - вес 24 выбранных. Потом выберем гири
1 ... 12, 24, 26 ... 36 и теперь n уменьшится и
нам потребуется новый вес g. Дальше выберем гири
1 ... 12, 23, 26 ... 36 потом 1 ... 12, 22 ... 36
и так далее. ~~Когда~~ После того как мы
выберем 1 ... 13, 26 ... 36 мы выберем 1 ... 13,
25, 27 ... 36 и снова будем повторять этот
алгоритм, причем n всегда будет уменьшаться.
~~Д~~ Так мы получим 145 различных вариантов n. = 12·11+13 – где, понятно, нужно было пояснить
~~представлено~~ Для сохранения равенства нам
потребуется 145 различных вариантов g, но
а ~~максимум~~ таких вариантов ~~максимум~~

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306282 — номер участника

лист 4 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№8 (продолжение)

39 (это веса любых из гирь от 13 до 50 и 0, когда „свободной гирьки" нет, и все ещё у нас не может быть двух „свободных" гирек т.к. любые 24 оставшихся гири легче, чем те 24 которые мы выбрали). Значит ~~из как~~ в какой-то раз равенство не будет соблюдено, и таких ~~как из~~ пятидесяти ~~хх~~ гирь нет.

Ответ: нет.

№7

Пусть только одна скобка из трех делится на простое число p (~~такое~~ на что p^2 - частное). Тогда ~~остальные~~ другие две скобки взаимно-просты с частным $\Rightarrow abc+1$ делится на произведение этих двух скобок. Без ограничения общности скажем что эти две скобки $(ab+a+1)$ и $(bc+b+1)$. $abc+1$ ⋮:

$abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1) \Rightarrow abc+1 \geq (ab+a+1)(bc+b+1)$ (т.к. произв не 0)

$abc+1 \geq ab^2c+abc+ab^2+2ab+bc+a+b+1$

Тогда $ab^2c+ab^2+2ab+bc+a+b \leq 0$?! (числа нат.)

Значит хотя бы две скобки делятся на p. (т.к. не может быть такого, что ни одна из скобок не делится на p). Пусть это скобки $(ab+a+1)$ и $(bc+b+1)$ тогда

$$\begin{cases} ab+a+1 \equiv_p 0 \\ bc+b+1 \equiv_p 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+1)(b+1) \equiv_p b \\ bc \equiv_p -(b+1) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (a+1)(b+1)(b)(c) \equiv_p -(b+1)b$

$(a+1)c \equiv_p -1$ (мы можем сокращать ведь p взаимно-просто с $b(b+1)$, ведь если не взаимопросто то не выполняется одно из сравнений сверху)

№7 (продолжение)

и т.к. $(a+1)/c \equiv -1$ то $ac+c+1 \equiv 0$ и все три скобки $\vdots p$. Но т.к. все три скобки делятся на p, то $abc+1$ тоже должно делиться на p.

(+)

$abc+1 \equiv ((ac+c+1)-c-1)\cdot b+1 \equiv -b(c+1)+1 \equiv -(bc+b+1)+2 \underset{p}{\equiv}$

$\underset{p}{\equiv} 2 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow$ единственный вариант что $p=2$ (+).

Но тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = 4(abc+1)$

Но если раскрыть скобки и взять часть слагаемых, мы получим $4abc+1+a+b+2bc < 4(abc+1)$

$\overset{?}{\geq}$

(т.к. мы взяли часть слагаемых а не все сразу)

$a+b+2bc < 3$, но a, b и c - натуральные и $a+b+2bc \geq 4$ и мы получаем противоречие.

Значит не может быть такого чтобы их частное было квадратом простого числа (это не выполнятся когда только одна скобка $\vdots p$, когда 0 скобок $\vdots p$ и когда ≥ 2 скобок $\vdots p$)

Ответ: нет