Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 63 7КА

Заметим, что k может быть только 2, 3, 4, 5 или 6 - значит больше 5 пятёрок не получить. Пусть возможно получить ровно 5 пятёрок, тогда n = и сумме 2ух последовательных (2-хорошее), и 4ёх последовательных (4-хорошее). Однако 2-хорошее $\not\vdots\, 2$, а 4-хорошее $\vdots\, 2$ (т.к. в 1ом случае 1чётное + 1нечётное, а во 2ом - 2 чётных + 2 нечётных) - значит такое невозможно и Вася мог получить ≤ 4 пятёрок.

На ровно 4 есть пример:

$6045 = 1005 + 1006 + 1007 + 1008 + 1009 + 1010$ - 6-хорошее

$6045 = 1207 + 1208 + 1209 + 1210 + 1211$ - 5-хорошее

$6045 = 2014 + 2015 + 2016$ - 3-хорошее

$6045 = 3022 + 3023$ - 2-хорошее

Ответ: 4.

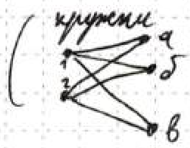
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 63 $\overset{+}{5c}$

7 класс

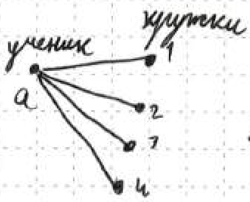
Представим ситуацию как двудольный граф: левая доля - вершины, соответствующие ученикам класса, правая - все кружки. Ребро проводим если данный ученик посещает данный кружок. Очевидно, что степень каждой вершины-ученика (далее просто ученика) ≥ 2, иначе у пары вершин-кружков (далее просто кружков) не может быть ни одного общего ученика, а должно быть 3 -?!

Если степень равно 2, то любой паре кружков в соответствие поставим учеников, которые там занимаются (



тогда паре (1;2) сопост (а, б и в) ← группа детей). Очевидно, что никакие группы детей после сопоставления не пересекаются (иначе у какого-нибудь ребёнка степень ≥ 3, а мы рассматриваем равно 2). (Тогда учеников $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = 63 > 60$ — очев?)

Предположим, степень равно 4:



тогда каждый ученик состоит в списке (списком будем называть объект, куда будем записывать каждого ученика, входящего и в i-ый, и в j-ый кружки для всех пар i;j, кроме перестановки $(i;j) \leftrightarrow (j;i)$ — в списках могут быть повторения, в отличии от множества) 6 раз (на примере a: от 12, от 13, от 14, от 23, от 24, от 34).

Однако величина списка $= \frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = 63$.

↑ кол-во пар (i;j)-кружков; ↖ кол-во людей в каждой такой паре.

А $63 \not\vdots\ 6$ — значит равно 4 не бывает.

Если же степень ≥ 5, то каждый ученик состоит в списке ≥ 10 раз ($\geq C_5^2$), если равно 10 - то $63 \not\vdots\ 10$ -?!, а если ≥ 11 - то кол-во детей < 6 ($6\cdot 11 > 63$), а такого нет по условию. Значит единственный возможный вариант - когда каждый ученик ходит ровно в 3 кружка - тогда в списке он состоит $C_3^2 = 3$ раза $\Rightarrow$ всего учеников 21 $\left(\frac{63}{3}\right)$.

А поскольку в условии сказано, что такой класс существует, и мы доказали, что в нём может быть только 21 ученик, то пример такого класса строить не нужно $\Rightarrow$ 21 и есть ответ.

Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 63

7 ТА

++

Докажем, что каждая дробь слева ≤ 1; (на примере $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}$ - с остальными аналогично):

Пусть $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} > 1$, тогда ($b+c+1>0$, значит можем перенести с тем же знаком)

$(a-1)^2 > b+c+1 \Rightarrow a^2+1 > 2a+b+c+1 = a+(a+b+c)+1 = (a^2+b^2+c^2)+1+a \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 > \underset{\overset{\vee\!/}{a^2}}{(a^2+b^2+c^2)} + \underset{\overset{\vee\!/}{0}}{a} \Rightarrow$ такое невозможно, значит они ≤ 1 (дроби).

Заметим, что если к дроби $\geq 0, \leq 1$ сверху (числ) и снизу (знам.) добавить одинаковое положительное (или 0) число, эта дробь (нестрого) возрастёт* Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$; докажем, что

$$\frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} + \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} + \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} \leq \frac{3}{a+b+c+1} \left(\text{значит и } \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{a+b+c+1} \right)$$

$$\| $$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)-2(a+b+c)+3}{a+b+c+1} = \frac{2(a+b+c)-2(a+b+c)+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1} \leq \frac{3}{a+b+c+1} \text{ чтд}$$

* Док-во:

$a, b - \geq 0$

$1 \geq \frac{a}{b} \geq 0$ ($\Rightarrow b \geq a$)

$c \geq 0$

Пусть $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c} \Rightarrow a(b+c) > (a+c)b \Rightarrow ac > bc$?! если $c \neq 0$ - сократим и получим $a > b$, но $a \leq b$; если $c=0$, $ac=bc$, значит

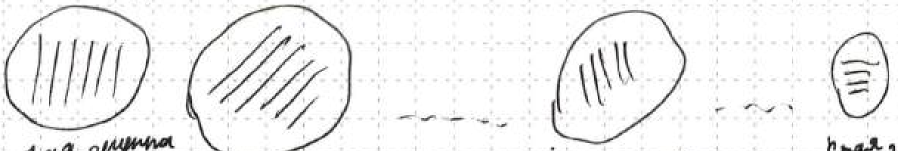
$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+c}$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

 0 A(n
—
СМ

Ответ: 250

Оценка: разобьём все звенья на максимальные по включению группы попарно параллельных:



1ая группа 2ая группа ... iая группа (в ней a_i звеньев) ... nтая группа

Назовём группы соответственными, если прямая, содержащая звено из 1ой группы $\perp$ прямой, содержащей звено из 2ой группы.

Заметим, что все звенья, перпендикулярные данному лежат в одной группе (из определения групп). Занумеруем группы так, чтобы при $i \% 2 < n$ iая и i+1ая группы соответственны (если у jой группы изначально нет соответственной - мы про неё забудем).

Общее кол-во пересечений под 90° $\leq \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4 + \dots + a_s a_{s+1}}{1}$

уже после перенумерации (остальные выкинуты; $s \leq n-1$)

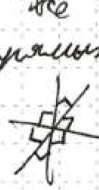
Заметим, что

$\frac{(a_1+a_2)^2}{4} \geq a_1 a_2$ $\left(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \geq 4a_1a_2\right) \Rightarrow$ всего $\leq \frac{(a_1+a_2)^2+(a_3+a_4)^2+\dots+(a_s+a_{s+1})^2}{4}$

таких пересечений, а значит на одном из звеньев их $\leq$

$\frac{(a_1+a_2)^2+\dots+(a_s+a_{s+1})^2}{2000}$ (т.к. все пересечения под 90° - двойные, не могут быть ≥ 3 прямых в точке со всеми углами 90°! так что делим ещё на половину общего кол-ва рёбер)

$a_1 + a_2 + \dots + a_{s+1} \leq 1000$ (т.к. $\leq$ все рёбра)



?!

Заметим, что

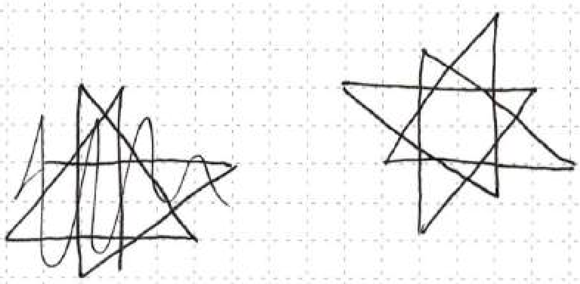
чтобы такая ломаная была замкнута, нужно чтобы ≥ 4 из a_k были > 0 $0 \leq k \leq s+1$

(иначе, очевидно, не получится; (здесь мы считаем, что групп без соответственных нет, иначе их рёбра можно добавить в другие группы из тех, у которых соответственные есть и это не уменьшит кол-во пересечений под 90° - значит в максимальном примере (1 из) таких групп нет)

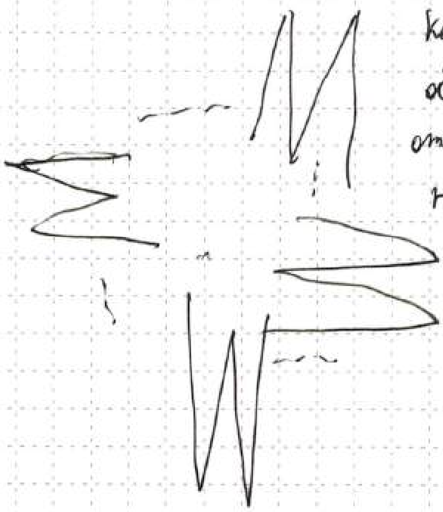
Так же понятно, что в этих ~~группах~~ 2 надгруппах* должно быть поровну звеньев (иначе картинка не будет замкнутой с равными звеньями) $\Rightarrow$ максимальное кол-во прямых углов $\leq \frac{500^2+500^2}{2000} = 250$ (четверть кол-ва звеньев)

* надгруппа - объединение группы и соответственной ей группы

Пример строится аналогично примеру на 8 звеньев:



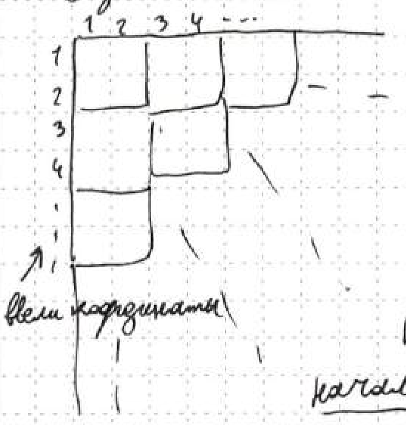
, но здесь нужно будет добавить таких звеньев (так, чтобы



картинка осталась симметричной относительно поворота на 90° и 180°

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 63

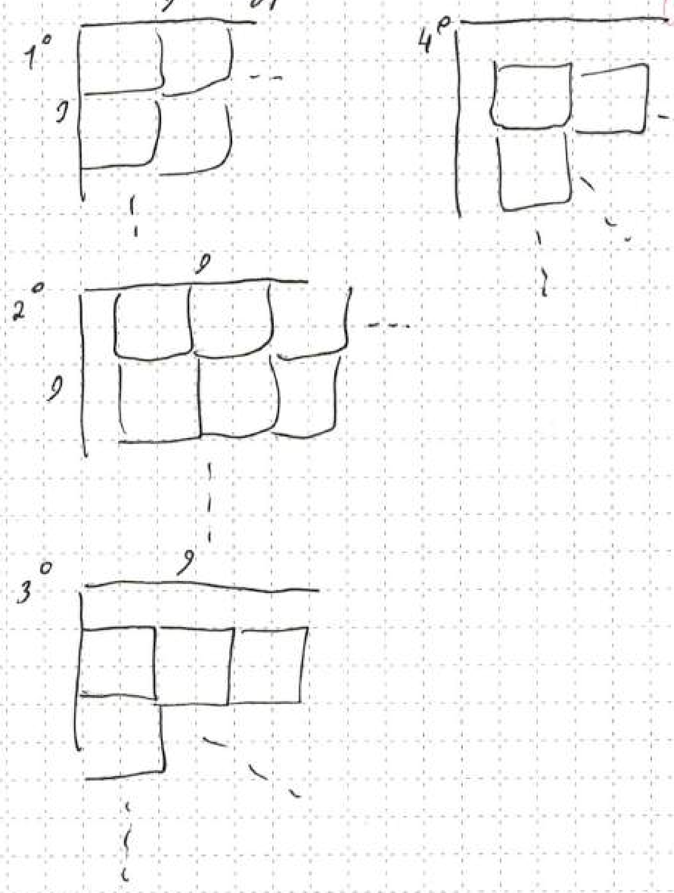
Разобьём 30x30 на 2x2:



Заметим, что в каждом 2x2 ≤ 1 короля, а т.к. всего их на доске 220, в то время как квадратов $15^2=225$, то ровно 5 из 2x2 пустые (без короля внутри). Предположим, есть 9x9 с < 11 (≤10) королями.

Ввели координаты

В 9x9 можно поместить 16 квадратиков начального разбиения (

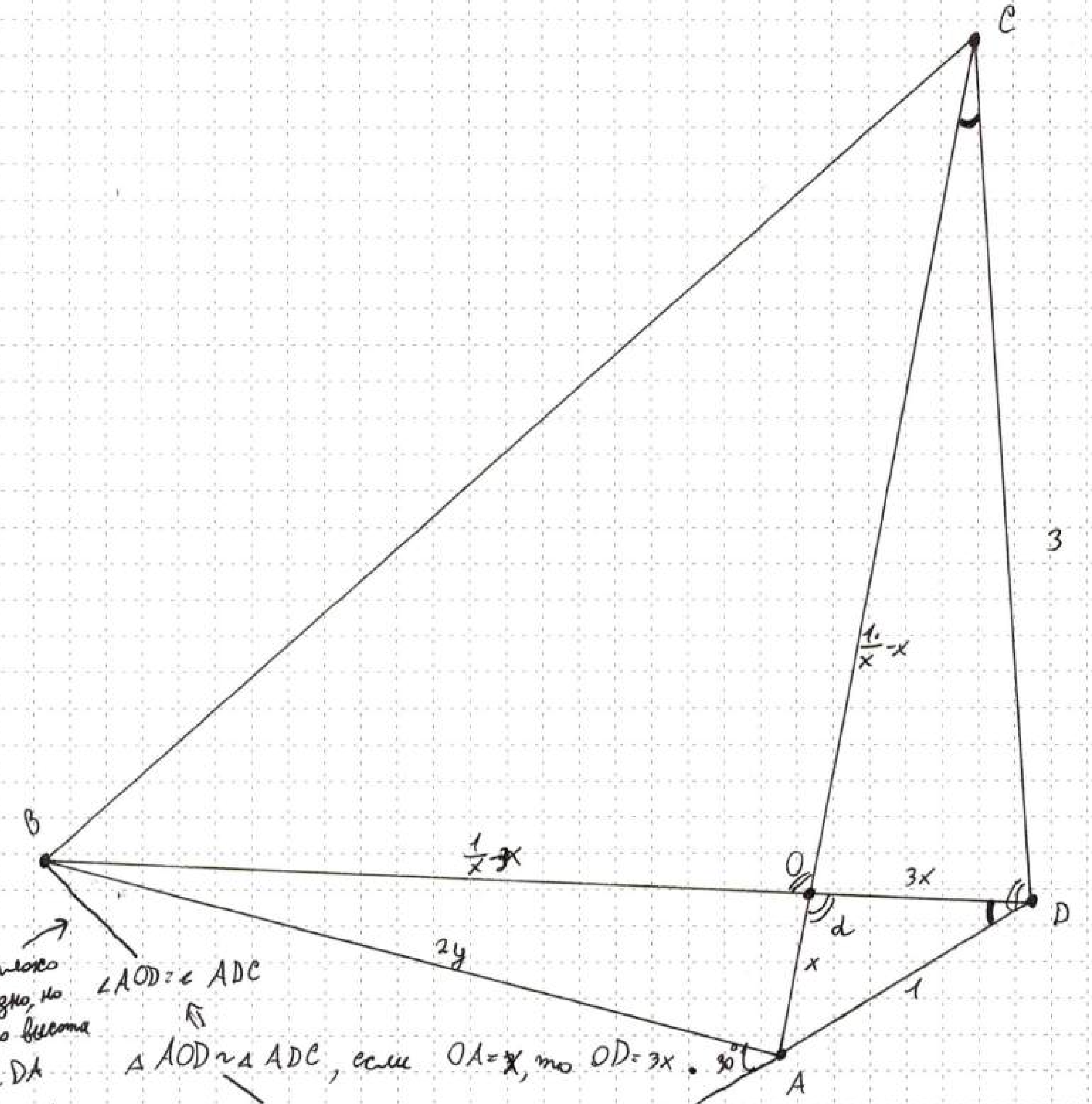


а каким из способов 1, 2, 3, 4 — зависит от чётности пары координат левой верхней клетки

(если (н;н) — 1)
(ч;н) — 2
(н;ч) — 3
(ч;ч) — 4

Значит на доске ≥ 6 2x2 нет короля (т.к. внутри 9x9 их 16, а королей ≤ 10) — а должно быть таких ровно пять?!

Значит в любом 9x9 ≥ 11 королей. чтд



плохо видно, но это высота на DA

$\angle AOD=\angle ADC$

$\triangle AOD \sim \triangle ADC$, если $OA=x$, то $OD=3x$.

AD-касательная к окружности опис $\triangle DOC$

$(\angle OCD=\angle ODA) \Rightarrow OA\cdot CA=AD^2 \Rightarrow CO=\frac{1}{x}-x=CA-OA \Rightarrow$

$\Rightarrow BO=\frac{1}{x}-3x=BD-OD=CA-OD$. $\angle AOD=\alpha$. Запишем теорему косинусов для

$\triangle AOD$: $x^2+(3x)^2-2x\cdot 3x\cos\alpha=1^2 \Leftrightarrow 10x^2-6x^2\cos\alpha=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{10-6\cos\alpha}$.

Пусть $BA=2y$, тогда высота BH на прямую AD (во-первых, попадёт на луч DA за A, т.к. $\angle BAD=180°-30°$, а во-вторых BHA - прямоуг $\triangle$ с углами $30°, 60°, 90°$, где BH против угла $30°$) $\Rightarrow BH=y$.

По теореме Пифагора $(\triangle BHD)$ $y^2+(\sqrt{3}y+1)^2=\frac{1}{x^2}$

$HD=HA+AD$

Задача №: 6 Лист 2 из 2 Номер участника: 63

А по теореме косинусов для $\triangle BOA$, $\left(\frac{1}{x}-3x\right)^2+x^2+2\left(\frac{1}{x}-3x\right)x\cos\alpha=4y^2$.

$\cos 180-\alpha=-\cos\alpha$

Подставив x^2 равным $\frac{1}{10-6\cos\alpha}$, получаем

$4y^2=5-4\cos\alpha$ $\left(=\frac{1}{x^2}+x^2(10-6\cos\alpha)-6+2\cos\alpha=10-6\cos\alpha+1-5+2\cos\alpha\right)$

Вернёмся к ~~[illegible]~~ $y^2+(\sqrt{3}y+1)^2=\frac{1}{x^2}$,

подставим y через $\cos\alpha$ и x тоже, получим

$$4-2\cos\alpha=\sqrt{3}\sqrt{5-4\cos\alpha}\Rightarrow 4\cos^2\alpha-4\cos\alpha+1=0,$$

а тогда $\cos\alpha=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{8}=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{x^2}+9x^2-6+x^2+2(1-3x^2)\cos\alpha=$

$=10-6\cos\alpha+\frac{10}{10-6\cos\alpha}-6+2\left(1-\frac{3}{10-6\cos\alpha}\right)\cdot$

$\cdot\cos\alpha=10-6\cos\alpha+\frac{10-6\cos\alpha}{10-6\cos\alpha}-6+2\cos\alpha=$

$=5-4\cos\alpha$

$4y^2+2\sqrt{3}y+1=\frac{1}{x^2}$

$1+5-4\cos\alpha+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-4\cos\alpha}=10-6\cos\alpha$

Наконец, запишем теорему косинусов для $\triangle BOC$:

$$\left(\frac{1}{x}-x\right)^2+\left(\frac{1}{x}-3x\right)^2-2\left(\frac{1}{x}-3x\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)\cos\alpha=BC^2=$$

$$=\frac{1}{x^2}(2-2\cos\alpha)+x^2(10-6\cos\alpha)+(-8+8\cos\alpha)=$$

$$=20-36\cos\alpha+12\cos^2\alpha-7+8\cos\alpha=13-24\cos\alpha+12\cos^2\alpha=$$

$$=13-\frac{24}{2}+\frac{12}{4}=4.$$ Тогда $BC=2$.

Ответ: $BC=2$.

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 63

Бем

7: ТА 7Ве

Решим от противного:

Разберём случаи кол-ва чётных среди a, b и c:

1° все нечётны;

тогда $ab+a+1, bc+b+1, ac+c+1 \not\vdots 2$, а $abc+1 \vdots 2 \Rightarrow \underbrace{(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)}_{\text{число } X} \not\vdots abc+1$?!

Такое невозможно

2° 1 чётное (НУО, a):

$abc+1 \not\vdots 2$, а $ac+c+1 \vdots 2 \Rightarrow$ если частное - квадрат простого, то это 2^2

(т.к. двойка в нём точно есть)

Тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = 4abc+4$

$\vee$

$(abc)^2 + 3abc + 1$ (раскрыв скобки)

$\vee$

$(abc+1)^2 \Rightarrow 4 > abc \Rightarrow abc \leq 3$ ($u\ abc \vdots 2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow abc = 2 \Rightarrow a=2\ b=c=1$; а

при таком варианте $ab+a+1 = 5$ $abc+1=3$, значит тоже не подходит

$bc+b+1 = 3$

$ac+c+1 = 4$

3° 2 чётных (НУО, a и b):

$abc+1 \not\vdots 2$, а $ac+c+1 \vdots 2 \Rightarrow$ аналогично 2°, частное $= 2^2$, а тут, как мы знаем, решения нет

4° все 3 чётны.

Если $abc+1 \not\vdots$ ни одному из $ab+a+1$, $bc+b+1$ и $ac+c+1$, то частное включает в себя ≥ 3 (неединичных) множителя (от результата деления с этими скобками) - тогда это не квадрат простого.

Предположим (НУО) $abc+1 \vdots ab+a+1$, пусть $ab+a+1 \vdots p$ (простое), тогда

$ab \underset{p}{\equiv} -a-1 \Rightarrow abc+1 \underset{p}{\equiv} -(ac+c-1) \underset{p}{\equiv} 0$, тогда (т.к. $p \neq 2$ по чётности)

$ac+c+1 \not\vdots p$ - получаем, что $(ab+a+1;\ ac+c+1) = 1$ (иначе $abc+1 \vdots p$, $ac+c-1 \vdots p$, $ac+c+1 \vdots p$?!)

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 63

Заметим, что если частное - квадрат простого, то это простое есть и в $bc+b+1$, и в $ac+c+1$, иначе (если только в 1 из них, т.к. очевидно, что $ab+a+1$ теоретически может быть ему же кратно, но от $ab+a+1$ оно уйдёт из-за $abc+1 \vdots ab+a+1$) $abc+1 \vdots (ab+a+1)(bc+b+1)$, но

почему? делится на произведение

т.к. НУО, это простое только в $ac+c+1$ (и, возможно, в $ab+a+1$)

и почему ~~можно рассмотреть НУО~~ не уменьшается общность? Уже было НУО.

$(ab+a+1)(bc+b+1) > ab^2c+1 > abc+1$, и $abc+1 \not\vdots$ о?! (нет кратности) =)

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} bc+b+1 \vdots p \\ ac+c+1 \vdots p \end{matrix}\right)$ тогда $b(c+1) \underset{p}{\equiv} (a+1)c \underset{p}{\equiv} -1$

$\left.\begin{matrix} c \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{a+1} \\ b \underset{p}{\equiv} -\frac{a+1}{a} \end{matrix}\right)$ значит $ab+a+1 \underset{p}{\equiv} -a-1+a+1 \underset{p}{\equiv} 0$, то есть и

$ab+a+1 \vdots p$, однако $abc+1 \underset{p}{\equiv} (-1)^2 \frac{a+1}{a} \cdot a \cdot \frac{1}{a+1} + 1 \underset{p}{\equiv}$

$\underset{p}{\equiv} 2$, а должно быть $\underset{p}{\equiv} 0$ $(abc+1 \vdots ab+a+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $p=2$, но $abc+1$ - нечётное - противоречие.

Это значит, что при всех нётных (a, b и c) частное не может быть квадратом простого.

А поскольку мы доказали это же во всех вариантах - значит такое частное никогда не будет квадратом простого

Ответ: нет

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 63

От противного (пусть может).

Отсортируем гири по весу:

$a_1 > a_2 > \dots > a_{50} > 0$ - веса, а разность весов a_i и $a_{i+1} = b_i$. (0 - тоже гиря; мы её добавили, ничего не изменив, а $b_{50} = a_{50}$)

Выберем набор из 24 максимальных весов: $a_1 + a_2 + \dots + a_{24}$ это больший вес

чем у любого другого набора из ≤ 24 => если он чему-то равен, то

либо всем оставшимся, либо каким-то 25.

Рассмотрим эти случаи:

Если $a_1 + \dots + a_{24} =$ набору из 25, то $a_1 + \dots + a_{24} < a_{25} + \dots + a_{50}$ (их 26 и они больше любых ост. 25)

Если = ост. 26, то $a_1 + \dots + a_{24} = a_{25} + \dots + a_{50}$

Объединим эти случаи и рассмотрим если $a_1 + \dots + a_{24} \leq a_{25} + \dots + a_{76}$

Ответ: нет