РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс: 8

2. Фамилия: ТИХОНОВА

Имя: КИРА

Отчество: АНДРЕЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион: Ульяновская область

4. Контактный телефон: 89677742133

5. Контактный электронный адрес: kira.tikhonova.73@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: четыре пятерки

Пример: $n=45$

$45=22+23$

$45=14+15+16$

$45=7+8+9+10+11$

$45=5+6+7+8+9+10$

Оценка:

Предположим что Вася мог получить все (~~[illegible]~~ 2, 3, 4, 5, 6) 5 пятерок. Тогда n представимо в виде суммы двух последовательных натуральных чисел и четырех.

$n = a+(a+1) = 2a+1$ = нечетное

$n = b+(b+1)+(b+2)+(b+3) = 4b+6$ = четное,

число не может быть нечетным и четным одновременно $\Rightarrow$ 5 не бывает $\Rightarrow$ ≤ 4 пятерки

Задача № 2 Лист 1 из 4 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Оценка:

I случай: каждый ученик ходит в 1 кружок.
Заметим, что каждые ~~ученик~~ 2 кружка пересекаются ровно по 3 ученикам $\Rightarrow$ эти 3 ученика ходят $\geq$ в 2 кружка (которые по ним пересекаются), т.к. все ученики ходят в одинаковое число кружков, то все ученики ходят $\geq$ в 2 кружка.

II случай: каждый ученик ходит в 2 кружка.
Рассмотрим любой кружок, назовем его A, пусть в нем y учеников. Предположим $y \leq 17$. Тогда заметим что по лемме найдется кружок C, с которым A пересекается $\leq \frac{y \cdot 1}{6} \leq \frac{17}{6}$ учеников $\Rightarrow$ по ≤ 2 ученикам из A, противоречие. Предположим $y \geq 19$. Тогда заметим что по лемме найдется кружок B с которым A пересекается $\geq \frac{y \cdot 1}{6} \geq \frac{19}{6}$ учеников $\Rightarrow$ по ≥ 4 ученикам, противоречие $\Rightarrow$ $y = 18$ $\Rightarrow$ во всех кружках занимается 18 учеников (т.к. можно аналогично сказать про каждый кружок) $\Rightarrow$ всего учеников $\frac{18 \cdot 7}{2} = 63$ ($:2$, потому что каждого считали 2 раза), но учеников < 60 по условию.

Лемма: Пусть есть кружок, назовем его A. Пусть в кружок A ходит y учеников. Пусть каждый ученик ходит в x кружков. Тогда найдется такой кружок B который пересекается с A $\geq$ по $\frac{y \cdot (x-1)}{6}$ ученикам и такой кружок C который пересекается с A $\leq$ по $\frac{y \cdot (x-1)}{6}$ ученикам. Доказательство леммы: Т.к. у каждого из y учеников одно ребро идет в A, то $x-1$ ребро идет не в A, тогда не в A идет $(x-1) \cdot y$ ребер. Эти ребра идут в ос-

Задача № 2 Лист 2 из 4 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

тавшиеся 6 кружков, т.е. найдется кружок B в котором идет $\geq \frac{(x-1)\cdot y}{6}$ ребер и кружок C в котором идет $\leq \frac{(x-1)\cdot y}{6}$ ребер (Двудольный граф: I доля: кружки II доля: ученики, соединяем ученика с ~~долей~~ кружком ребром, если ученик ходит в этот кружок).

III случай: каждый ученик ходит в 3 кружка. Рассмотрим любой кружок, назовем его A. Пусть в нем y учеников. Тогда предположим $y \leq 8$. Тогда по лемме есть кружок C в котором $\leq \frac{y\cdot 2}{6} \leq \frac{8\cdot 2}{6}$ учеников из A $\Rightarrow \leq 2$ учеников из A. Предположим $y \geq 10$. Тогда по лемме найдется кружок B в котором $\geq \frac{y\cdot 2}{6} \geq \frac{20}{6}$ учеников из A $\Rightarrow \geq 4$ ученика из A. Тогда $y = 9 \Rightarrow$ рассмотрим аналогично каждый кружок и поймем что в каждом кружке 9 учеников $\Rightarrow$ всего учеников $\frac{9\cdot 7}{3} = 21$, ($\vdots 3$, т.к. каждый ученик входит в 3 кружка).

IV случай: каждый ученик входит в 4 кружка. Рассмотрим любой кружок, назовем его A, пусть в нем y учеников. Предположим $y \leq 5$. Тогда по Лемме есть кружок C в котором $\leq \frac{3\cdot 5}{6}$ учеников из A $\Rightarrow \leq 2$ учеников из A. Предположим $y \geq 7$. Тогда по Лемме есть кружок B в котором $\geq \frac{3\cdot 7}{6}$ учеников из A $\Rightarrow \geq 4$ ученика из A, рассмотрим аналогично все кружки и поймем что в каждом 6 учеников. $\Rightarrow$ всего $\frac{6\cdot 7}{4}$ = не целое число ($\vdots 4$ т.к. каждый ученик ходит в 4 кружка), а учеников целое число

Задача № 2 Лист 3 из 4 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

V случай: каждый ученик ходит в 5 кружков.
Рассмотрим любой кружок, назовем его A. Пусть в него ходит y учеников. Предположим $y \leq 4$ ⇒ ⇒ по лемме найдется кружок C, в который ходит $\leq \frac{4y}{6} \leq \frac{16}{6}$ учеников из A ⇒ ≤ 2 учеников из A. ⇒ $y \geq 5$

Предположим $y \geq 5$ ⇒ по лемме найдется кружок B в который ходит $\geq \frac{4y}{6} \geq \frac{20}{6}$ учеников из A ⇒ ⇒ ≥ 4 учеников из A. ⇒ $y \leq 4$ ⇒ Такого y не бывает.

VI случай: каждый ученик ходит в 6 кружков.
Рассмотрим любой кружок, назовем его A. Пусть в него ходит y человек. Предположим $y \leq 3$. Тогда по лемме найдется кружок C, в который ходит $\leq \frac{5y}{6} \leq \frac{15}{6}$ учеников из A ⇒ ≤ 2 учеников из A. ⇒ $y \geq 4$

Предположим $y \geq 4$. Тогда по лемме найдется кружок B, в который ходит $\geq \frac{5y}{6} \geq \frac{20}{6}$ учеников из A ⇒ ≥ 4 ученика из A ⇒ $y \leq 3$ ⇒ Такого y нету

VII случай: каждый ученик ходит в 7 кружков, т.е. каждый ученик ходит в каждый кружок.
По условию есть ≥ 7 учеников ⇒ ~~в каждый~~ рассмотрим любой кружок A и любой кружок B, назовем его B, тогда в A и в B ходят ~~кружок ходит ≥ 7 учеников ⇒ любые 2 кружка~~ все ученики ⇒ A и B пересекаются по всем ученикам, ~~ка пересекаются ⇒ по 7 ученикам~~ а их > 3.

Заметим что каждый ученик ходит в ≤ 7 кружков, т.к. всего ≤ 7 кружков.

Пример на 21 ученика:

Задача № 2 Лист 4 из 4 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разобьем людей на 7 групп: $\mathrm{I}_л$: 1, 2, 3. $\mathrm{II}_л$: 4, 5, 6 ...
... $\overline{\mathrm{VII}}_л$: 19, 20, 21. Разобьем кружки на 7 групп:

$\mathrm{I}_к$: 1, 2, 3

$\mathrm{II}_к$: 1, 4, 5

$\mathrm{III}_к$: 1, 6, 7

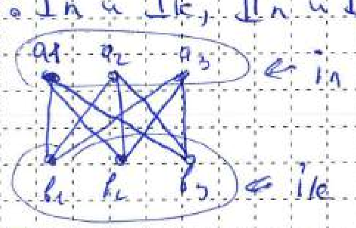
$\mathrm{IV}_к$: 2, 4, 6

$\mathrm{V}_к$: 2, 5, 7

$\mathrm{VI}_к$: 3, 4, 7

$\mathrm{VII}_к$: 3, 5, 6

Разобьем группы на пары: $\mathrm{I}_л$ и $\mathrm{I}_к$, $\mathrm{II}_л$ и $\mathrm{II}_к$ ....

Рассмотрим ~~...~~ $i_л$ и $i_к$. 
, соединим их так ребрами. Докажем что пример работает: Заметим что если взять любые 2 кружка, то они находятся только в одной группе и пересекаются ровно по 3 людям.

Ответ: 21

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

$\cancel{\frac{(a-1)^2}{b+c+1}} =$

$$a^2+b^2+c^2 = a+b+c$$

$$a^2-a = b+c-b^2-c^2 \qquad c^2-c = a+b-a^2-b^2$$

$$b^2-b = c+a-c^2-a^2$$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} = \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} + \frac{b^2-2b+1}{a+c+1} + \frac{c^2-2c+1}{a+b+1} =$$

$$= \frac{(a^2-a)-a+1}{b+c+1} + \frac{(b^2-b)-b+1}{a+c+1} + \frac{(c^2-c)-c+1}{a+b+1} = \frac{b+c-b^2-c^2-a+1}{b+c+1} + \frac{c+a-c^2-a^2-b+1}{a+c+1} + \frac{a+b-a^2-b^2-c+1}{a+b+1} =$$

$$= \frac{(b+c+1)-(b^2+c^2+a)}{b+c+1} + \frac{(c+a+1)-(c^2+a^2+b)}{a+c+1} + \frac{(a+b+1)-(a^2+b^2+c)}{a+b+1} = 3 - \left(\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + \frac{c^2+a^2+b}{a+c+1} + \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}\right)$$

$$\overset{(?)}{\geq} \frac{3}{1+a+b+c} \iff \frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1} + \frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \leq$$

надо доказать

$$\leq 3 - \frac{3}{1+a+b+c} = \frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}.$$

Мы решим задачу если докажем что $\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1} + \frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \leq \frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}$.

Док-во: $\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1} + \frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \geq \frac{a+b^2+c^2}{a+b+c+1} + \frac{b+a^2+c^2}{a+c+1+b} + \frac{c+a^2+b^2}{a+b+1+c}$ (к I-ому знаменателю добавили неотриц число, и ко II-ому и к III-ему $\Rightarrow$ значение дроби уменьшилось) $= \frac{a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+1} = \frac{3(a+b+c)}{a+b+c+1}$,

доказали. $(2(a^2+b^2+c^2) = 2(a+b+c))$

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ТИХОНОВА

Имя: КИРА

Отчество: АНДРЕЕВНА

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

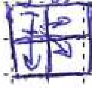
3. Регион Ульяновская область

11:55–11:57

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

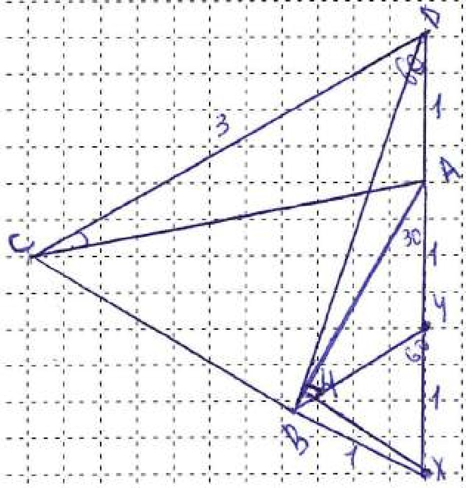
Разобьем доску 30×30 на квадратики 2×2, их будет $15 \cdot 15 = 225$ штук. Заметим, что в каждом квадратике 2×2 стоит ≤ 1 короля. Докажем это. Предположим в квадратике 2×2 стоит ≥ 2 короля. БОО пусть I-ый король в левой верхней клетке, тогда II-ой не может стоять ни в одной оставшейся клетке! потому что I их атакует



. Тогда заметим что в квадратике 2×2 стоит либо 0 королей, либо 1. 220 королей поставлено, а всего квадратов $225 \Rightarrow$ ровно в 5 квадратах нет короля, а в других есть. Заметим, что в доске 9×9 всегда в точности 16 квадратов 2×2, тогда заметим что в ≤ 5 квадратах нет короля $\Rightarrow$ короли есть в $\geq 16 - 5 = 11$ квадратов $\Rightarrow$ в квадрате 9×9 ≥ 11 королей.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



На прямой DA за точку A отметим точки X и Y так, что $AY = YX = DA = 1$. Заметим, что $DX = 3 = CD$, $\angle BDA = \angle DCA$ по условию и $BD = AC$ по условию $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle BDX = \triangle ACD$ по I признаку $\Rightarrow BX = AD = 1$, $\angle BXD = \angle CDX$. Заметим, что $\angle BAX = 180° - \angle DAB = 30°$. ~~Заметим,~~ Опустим XH — перпендикуляр на AB, тогда $\triangle XHA$ это $\triangle$ 30°-60°-90° $\Rightarrow XH = \frac{AX}{2} = 1 = BX \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle BHX$ — равнобедренный $\triangle$ с углом при основании 90° ($\angle BHX = 90°$) $\Rightarrow$ XB совпало с XH $\Rightarrow \angle XBA = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BXA = 60°$, $\angle CDA = \angle BXA = 60°$. $CD = 3 = DX \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle CDX$ равнобедренный и $\angle CDX = 60° \Rightarrow \angle DXC = 60°$, а $\angle DXB = 60° \Rightarrow$ C, B, X — лежат на одной прямой. Докажем, что $\triangle XBY \sim \triangle XCD$. $\triangle XBY$ — равнобедренный ($BX = 1 = XY$) с $\angle BXY = 60 \Rightarrow \triangle XBY$ — равносторонний $\Rightarrow \angle BYX = 60$. Доказано, что $\angle CDX = 60 \Rightarrow CD \parallel BY$, т.к. $\angle CDY = \angle BYX \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle BYX \sim \triangle CDX \Rightarrow \frac{XY}{YD} = \frac{XB}{BC} = \frac{1}{BC}$

$\frac{XY}{YD} = \frac{1}{2}$

$BC = 2$

Ответ: $BC = 2$.

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Тихонова Кира

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Предположим, что $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=p^2(abc+1)$.

I случай. БОО $ab+a+1 \vdots p^2 \Rightarrow ab+a+1 \geq p^2$, т.к. $ab+a+1>0$. Заметим что $(bc+b+1)(ca+c+1)=abc^2+bc^2+bc+abc+bc+b+ac+c+1 > abc+1$
$\Updownarrow$
$abc^2+bc^2+bc+bc+b+ac+c>0$, по условию все числа натуральные $\Rightarrow >0$.

Тогда заметим что $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) > p^2 \cdot (abc+1)$, противоречие.

II случай. БОО $ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p$, докажем, что $ca+c+1 \vdots p$. Док-во:

$ab+a+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Leftrightarrow \underbrace{ab+a}_{a(b+1)} \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow a \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{b+1}$ ($b+1 \not\equiv_p 0$, т.к. $a(b+1) \not\equiv_p 0$).

$ca+c+1 \underset{p}{\equiv} c\cdot\left(\frac{-1}{b+1}\right)+c+1 \underset{p}{\equiv} \frac{-c}{b+1}+c+1 \underset{p}{\equiv} \frac{-c+bc+c}{b+1}+1 \underset{p}{\equiv} \frac{bc}{b+1}+1 \underset{p}{\equiv} \frac{bc+b+1}{b+1} \underset{p}{\equiv} 0$, т.к. $bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0$. Докажем, что $abc+1 \not\vdots p$. Нам дано: $bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0$, $ab+a+1 \underset{p}{\equiv} 0$, $ca+c+1 \underset{p}{\equiv} 0$. $bc+b+1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow bc+b \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow b(c+1) \underset{p}{\equiv} -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c+1 \underset{p}{\equiv} -\frac{1}{b}$ ($b \not\equiv_p 0$, т.к. $b(c+1) \not\equiv 0$) $\Rightarrow c \underset{p}{\equiv} -\frac{1+b}{b}$. $\underbrace{ca+c+1}_{0 \equiv_p} \underset{p}{\equiv} ca - \frac{1+b}{b}+1 \underset{p}{\equiv}$

$\underset{p}{\equiv} \frac{cab-1-b+b}{b} \underset{p}{\equiv} \frac{abc-1}{b} \Rightarrow \frac{abc-1}{b} \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow abc-1 \underset{p}{\equiv} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow abc \underset{p}{\equiv} 1 \Rightarrow abc+1 \underset{p}{\equiv} 2$, мы доказали для всех p кроме $p=2$. ~~[illegible]~~ Для $p=2$ решим отдельно задачу. Для $p \neq 2$: заметим, что $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^3$, а $p^2(abc+1) \not\vdots p^3$, значит $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \neq p^2(abc+1)$.

Для $p=2$:

II. I случай. $a=b=c=1$. $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} =$

$= \frac{3\cdot 3\cdot 3}{2} =$ не целое, противоречие.

II. II случай. БОО $a \geq 2$. Тогда заметим, что $ab+a+1 \geq 2+2+1 > 4 = p^2$. $\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)\cdot$ $\cdot(ca+c+1) > p^2(abc+1)$.

~~III случай. $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p$, $ca+c+1 \vdots p$ решается~~ ~~также, как и во II случае.~~ Докажем, что все случаи разобраны. $\{ab+a+1=x$, $bc+b+1=y$, $ca+c+1=z$. $xyz \vdots p^2$, x, y, z - равноправны, т.к. получены циклическим сдвигом переменных $a, b, c \Rightarrow$ Есть только 2 случая. ($x \vdots p^2$ либо $y \vdots p^2$ либо $z \vdots p^2$) и ($x \vdots p$ и $y \vdots p$, либо $x \vdots p$ и $z \vdots p$, либо $y \vdots p$ и $z \vdots p$).

Ответ: нет

Задача №_____ Лист_____ из _____ Фамилия, имя:_______________________________

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!