Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 67 + 7КА

Пусть число x 4-хорошее и 6-хорошее.

Оно 4-хорошее $\Rightarrow x = a_1 + (a_1+1) + (a_1+2) + (a_1+3) = 4a_1 + 6 \equiv_4 2 \Rightarrow x \,\vdots\, 2$

Оно 6-хорошее $\Rightarrow x = a_2 + (a_2+1) + (a_2+2) + (a_2+3) + (a_2+4) + (a_2+5) \equiv_2 15 \Rightarrow x \not\vdots\, 2$ Противоречие

Значит Вася мог получить не более чпятёрок.

Пример: число $n = 45$.

~~45=45~~ ~~1-хорошее~~

$45 = 22 + 23$ 2-хорошее

$45 = 14 + 15 + 16$ 3-хорошее

$45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ 5-хорошее

$45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$ 6-хорошее

Ответ: 4.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 67

7 KAS

Назовём мультипосещением пару различных кружков и ученика, который посещает их оба. Пусть каждый ученик посещает $1 \le t \le 7$ кружков, а всего учеников $7 \le x \le 59$.

Заметим, что у каждого ученика $\frac{t \cdot (t-1)}{2}$ мультипосещений (пар кружков, которые он посещает). Тогда всего мультипосещений $x t(t-1)/2$. Но в то же время их $7 \cdot 6 \cdot 3/2 = 63$, так как для каждой пары кружков (их $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$) есть ровно 3 ученика, образующих с ними мультипосещение.

$$63 = x \cdot \frac{t(t-1)}{2}$$

1° $t = 1$. Правая часть равна 0 – противоречие.

2° $t=2$. $x = 63 \ge 60$. Противоречие

3° $t=3$. $x = 21$. Ок, всё нормально.

4° $t=4$. $63 = 6x$. Противоречие

5° $t=5$. $63 = 10x$. Противоречие.

6° $t=6$. $63 = 15x$. Противоречие

7° $t=7$. $x = 3 \le 6$. Противоречие.

Получается, что в таком классе может быть только 21 ученик, но в условии сказано „В классе учится", что гарантирует наличие ≥ 1 такого класса

Ответ: 21.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 67

+ ТА

7ип

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$a^2-a=b-b^2+c-c^2$

$b-b^2=\frac{1}{4}-(b-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{4}$

$c-c^2=\frac{1}{4}-(c-\frac{1}{2})^2\leq\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a^2-a\leq\frac{1}{2}$

$a^2-a-\frac{1}{2}\leq 0$

корни $\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1-\sqrt{3}}{2}<0$

$\Rightarrow a\leq\frac{1+\sqrt{3}}{2}<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow a<\frac{3}{2}$, аналогично $b<\frac{3}{2}$, $c<\frac{3}{2}$

Докажем, что

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}\leq\frac{1}{1+a+b+c}$$

$a(a-1)^2+(a-1)^2(1+b+c)\leq 1+b+c$

$a(a-1)^2\leq(b+c+1)(2a-a^2)$ $a=0\Rightarrow$ всё хорошо, т.е. можно сократить

$(a-1)^2\leq(b+c+1)(2-a)$

1° $a\leq 1$.

Тогда ЛЧ ≤ 1, а ПЧ $\geq 1\cdot 1=1$

2° $a>1$ т.к. $a<\frac{3}{2}$

Тогда $(a-1)^2\leq(a-1)(2-a)\leq(b+c+1)(2-a)$

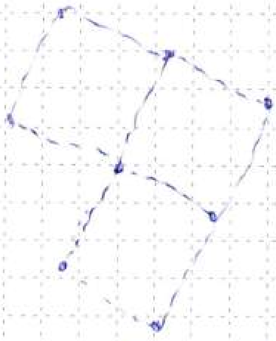
Аналогично подобные неравенства выполнены $\Rightarrow$ ✓

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 67

Заметим, что если количество звеньев в ломаной равно $4x+2$, то $k=x$.

Оценка:

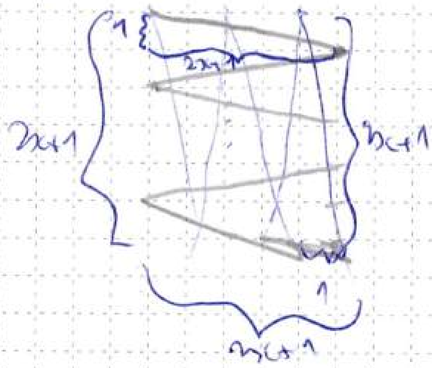
Если у нас звенья только 2 направлений, то пересечений не будет, т.к. мы попадём в такую решётку



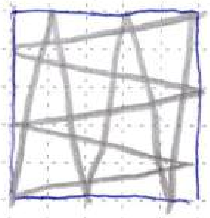
Если звенья 3-4 напр. (3 напр. => $k=0$), то

$k \le \left[\frac{4x+2}{4}\right] = x$.

Пример:



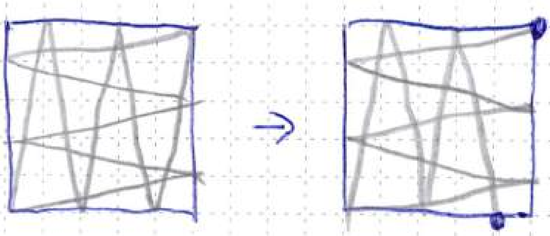
, например для $x=2$ это



Ответ: 62.

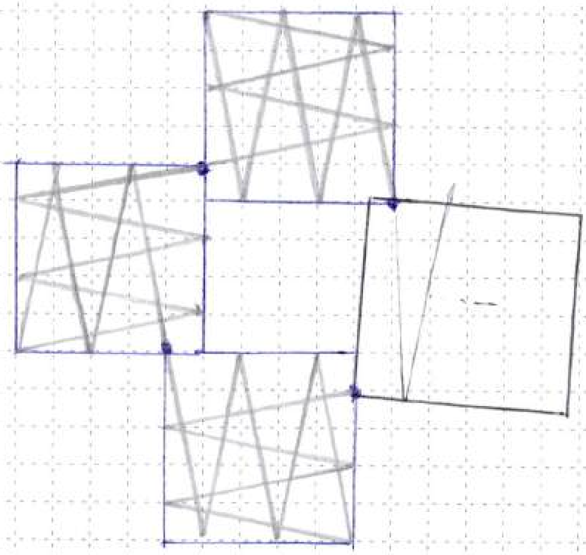
Далее приведен пример на $k = 62$. Оценку я не придумал.

Рассмотрим ломаную на 250 звеньев для которой $k = 62$. (Ту, которая в квадратике). Заберём у неё 1 звено в вершине угла.

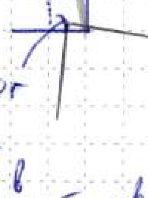


От этого её k не уменьшится, но образуются 2 конца.

Склеим 3 таких ломаных на 249 звеньев следующим образом:



Теперь рассмотрим аналогичную ломаную без звена, но для $k = 63$, в которой осталось 253 звена. (Нарисуем её в нужном масштабе). Примкнём её туда. Теперь у полученной 1000-звенной ломаной $k = 62$, условия задачи не нарушаются, т.к.



Этот конец попадает в пунктирный квадратик, а никаких концов нет на прямой нарис. карандашом

Задача № 15 Лист 1 из 1 Номер участника: 67

7 ИВ

Разобьём доску 30×30 на квадратики 2×2. Всего 225 квадратиков. Заметим, что в каждом квадратике ≤ 1 король.

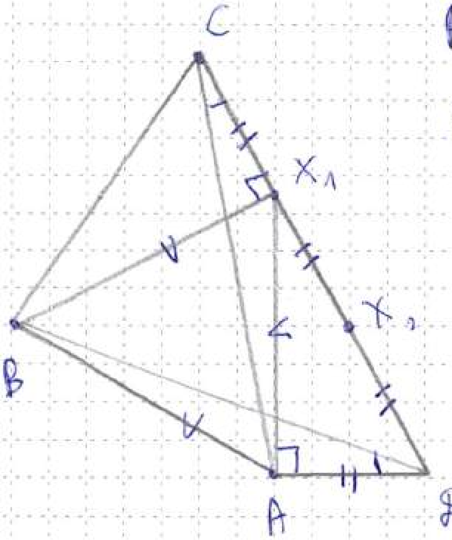
Любой квадрат 9×9 покрывает ≥ 16 квадратиков. Пусть условие неверно, т.е. нашёлся квадрат 9×9, в котором ≤ 10 королей. Тогда у нас $\geq 16-10=6$ пустых квадратиков, т.е. королей $\leq 225-6=219$. Противоречие.

УМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 67

7 ик



Разобьем CD на 3 равные части, равные AD. X_1, X_2 — такие точки, что они лежат на отрезке CD и $CX_1=X_1X_2=X_2D=AD$.

Проведем AX_1. Заметим, что $\triangle ACX_1=\triangle BDA$ по 2 сторонам и углу между ними. ($AC=BD$, $CX_1=DA$, $\angle ACX_1=\angle BDA$)

Тогда $\angle BAD=\angle CX_1A=150^\circ \Rightarrow \angle AX_1D=30^\circ$. Рассмотрим треугольник AX_1D. В нём $\angle AX_1D=30^\circ$, $X_1D=2AD$. Значит он прямоугольный (вроде общеизвестный факт, DA удвоить за точку A можно) и $\angle X_1AD=90^\circ$.

+. ДП

Также по равенству $\triangle ACX_1$ и $\triangle BDA$ верно, что $AB=AX_1$, но $\angle BAX_1=150^\circ-90^\circ=60^\circ$, поэтому $AB=AX_1=BX_1$.

$\angle BX_1C=180^\circ-\angle BX_1A-\angle DX_1A=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$.

Тогда $\triangle BX_1C=\triangle X_1AD$ по двум катетам. Значит $BC=X_1D=2AD=2$.

Ответ: $BC=2$

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 67

Пусть их частное q^2, $q \in \mathbb{P}$.

~~Далее докажем, что только одна из 3 скобок $\vdots q$.~~

1°. $q=2$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) > a^2b^2c^2+a^2bc+ab^2c+abc^2+a+b+c+1 \geq$

$\geq 4abc+4 \Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) > 4(abc+1)$.

2° $q \geq 3$.

Докажем, что только одна из 3 скобок $\vdots q$

2.1° $abc+1 \vdots q$

$\begin{cases} abc+1 \vdots q \\ ab+a+1 \vdots q \end{cases}$ (НУО именно эта скобка)

$\Rightarrow abc+ac+c \vdots q$

$ac+c-1 \vdots q \xrightarrow{q\geq 3} ac+c+1 \not\vdots q$.

Пусть $bc+b+1 \vdots q$. Тогда $abc+ab+a \vdots q \Rightarrow ab+a-1 \vdots q \xRightarrow{q\geq 3}$

$\xRightarrow{q\geq 3} ab+a+1 \not\vdots q$ — противоречие.

Значит только одна скобка $\vdots q$

2.2° $abc+1 \not\vdots q$

Пусть какие-то 2 скобки $\vdots q$, НУО первые 2.

$\begin{cases} ab+a+1 \vdots q \\ bc+b+1 \vdots q \end{cases}$

$abc+ac+c \vdots q$

$abc+ab+a \vdots q$

$(ab+a)-(ac+c) \vdots q \Rightarrow ab+a+1 \underset{q}{\equiv} ac+c+1 \Rightarrow ac+c+1 \vdots q$.

$\Rightarrow$ произведение трех скобок делится на q^3, но $abc+1 \not\vdots q$

$\Rightarrow$ их частное $\vdots q^3$, что не может быть q^2.

+ ММ 7 ВД

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Мы поняли, что лишь 1 скобка $\vdots q$ (НУО первая). То есть если какое-то $p \in \mathbb{P}, p \neq q$ входит во вторую скобку $(bc+b+1)$ в степени α, а в третью в степени β, то после деления на $abc+1$ в число p входит в степени 0. Значит $\forall p \in \mathbb{P}$: $|abc+1|_p \geq |(bc+b+1)(ca+c+1)|_p \Rightarrow$

$\Rightarrow (abc+1) \vdots (bc+b+1)(ca+c+1) \Rightarrow abc+1 \geq (bc+b+1)(ca+c+1)$. Но в то же время $(bc+b+1)(ca+c+1) > abc+1$ — противоречие.

Ответ: нет, не может

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 67

Дамокет

Пример:

веса гирь 625, 626, ..., 674

СБ

0