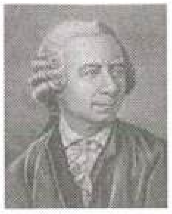
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-6 - 4Б
аудитория – посадочное место

41306263
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ МГ	+	− МК	
7 АЮ	7 ОЛ	7 МС	0 АБ	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306263 — номер участника

Задача 1

~~Заметь~~ Ответ: 4 пятерки

Пример:

Пусть число n – 45

$45 = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 = 5+6+7+8+9+10$

Оценка:

Заметим, что если число будет 4-хорошим, то $n = \frac{(k+k+3)\cdot 4}{2} = 4k+6$, т.е. $n \vdots 2$

Если же число 2-хорошее, то $n = \frac{(m+m+1)\cdot 2}{2} = 2m+1$

Т.к. m и n натуральные, число n одновременно $\vdots 2$ и $\equiv 1 \pmod 2$ — ?! $\Rightarrow$ число не может быть одновременно 2-хорошим и 4-хорошим.

Т.к. чисел больших одного и меньших 7 всего 5, одно из них мы не используем, макс. кол-во пятерок — 4.

Задача 3.

1. $2a \quad 2a+b+c \geq a+b+c \geq a^2 \Rightarrow \cancel{(a-1)^2} \; a^2-2a+1 \leq b+c+1 \Rightarrow$

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}$ — правильная дробь.

2. $a \geq 0$. Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \leq \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$ *

Аналогично для двух других дробей.

3. $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{a+b+c+1}$

$\cancel{\frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{a+b+c+1}} =$

* $\frac{n}{k} < \frac{n+x}{k+x}$, т.к. $\frac{k-n}{k} > \frac{k-n}{k+x}$ (дополнение до единицы)

Задача 3 часть 2.

Теперь сравним

$$\frac{(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c}{1+a+b+c} \quad и \quad \frac{3}{1+a+b+c}$$

$1+a+b+c > 0 \Rightarrow$ мы можем домножить и знак не изменится

$(a-1)^2+a+(b-1)^2+b+(c-1)^2+c =$

$= a^2-2a+a+1+b^2-2b+b+1+c^2-2c+c+1 =$

$= (a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3 = 3.$

Мы не уменьшили дробь, и она стала равна $\frac{3}{1+a+b+c} \Rightarrow$ изначальное выр-е $\leq \frac{3}{1+a+b+c}$. ЧТД.

Задача ~~3~~ 2

Всего пар кружков — 21, для каждой пары — ровно 3 школьника, которые ходят в эти два кружка.

Каждого такого школьника назовем ребром относительно кружков, куда он ходит (всего должно получиться 63 ребра)

Если ученик ходит на k кружков, он „закрывает собой" $\frac{k(k-1)}{2}$ ребер (кратные ребра он закрывать не может)

Тогда, если учеников a:

$$a\frac{(k-1)k}{2} = 63$$

$$a(k-1)k = 2\cdot3\cdot3\cdot7$$

$(k-1), k$ — посл-ые числа => ~~может быть только два / возможно треба кол~~

$k-1, k$ — это 6 и 7 (но тогда $a=3$, $3<6$ — ?!)

$k-1, k$ — это 2 и 3 — $a=21$.

Получается, подходит только 21 ученик.

Пример: Если $^{\text{и только если}}$ в n-ый класс ходит k-ый ученик, то на пересечении k-го столбца и n-ой строки „+"

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	+					+	+	+			+	+			+			+		+	
2	+	+					+		+			+	+			+			+		+
3	+	+	+							+			+	+	+		+			+	
4		+	+	+				+			+			+		+		+			+
5			+	+	+			+	+			+			+		+		+		
6				+	+	+			+	+			+			+		+		+	
7					+	+	+			+	+			+			+		+		+

пример верный

У каждой строчки ровно три одинаковых плюсика с любой другой, в каждом столбце ровно три плюсика

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306263 — номер участника

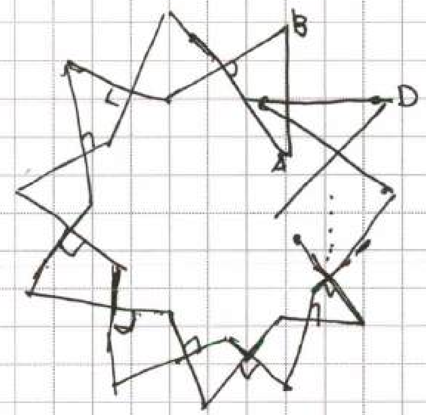
лист 4 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

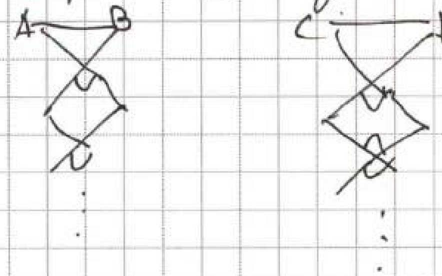
Задача 4

Пример для $k=1$

~~Заметим~~ Рассмотрим отрезки $AB \perp CD$.



Далее от каждого отрезка проведем отрезки, тоже пересек под углом 90°



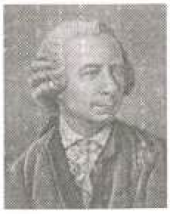
~~Заметим~~ назовем эти две части ломаной „полоской AB" и „полоской „BD"" кроме AB и DC

Все отрезки в этих полосках пересекают один из звеньев этой полоски, а AB и CD пересекают друг друга тоже под углом 90°

Б иначе заметим, что полоска может „гнуться", ~~а~~ (т.к только два угла в каждом 4-нике фиксированы) => две части полоски соприкоснутся

Заметим, что в ~~полоске~~ ломаной все звенья (кроме AB и CD) идут парами (возьмем 999 пар) тогда их будет 998 и 2 ребра AB и CD — итого 1000 звеньев.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

5-6 - 8б.4б

аудитория – посадочное место

41306263

номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5	6	7	8	Σ
+ пр	+ РХ	− А.П.	Ф кю	
4 ~~4~~ 4ю (?)	7 ме	0 МС	Ø МК	14
7 АВ				

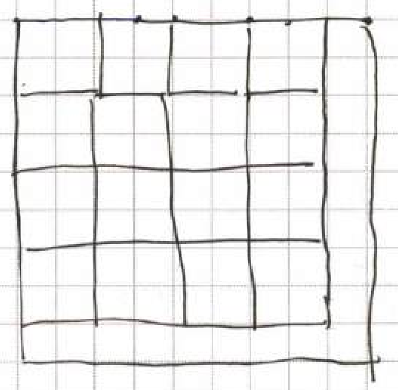
Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 41306263

класс номер участника лист 1 из 2

Задача 5.



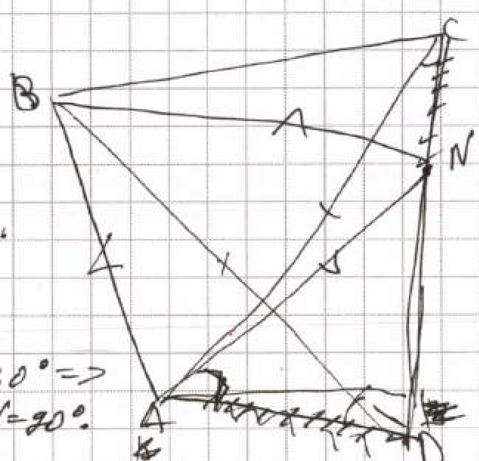
Пусть это не так. Тогда рассмотрим кв. 9×9, где менее 11 королей.

Заметим, что этот квадрат бьется на 16 непересекающихся квадратов 2×2

Если в нем меньше 11 королей, то ≥ на 6 квадратах нет ни одного короля

Заметим, что большой квадрат полностью бьется на 225 непересекающихся квадратов 2×2. Т.к. короли не бьют друг друга, в каждом квадрате макс. 1 король. По предположению, хотя бы в 6 квадратов пустует, но тогда королей не больше, чем 219 — ?! ⇒ в каждом квадрате 9×9 ≥ 11 королей

Задача 6.



Возьмем на CD т. N: CN = 1

Тогда △BAD = △ANC (сус).

∠CNA = 150°, ∠AND = 30°.

ND = 3 − 1 = 2.

ND : AD = 2 : 1, ∠AND = 30° ⇒

△AN — прям-ый, ∠DAN = 90°.

(Из рав-ства △BAD и △ANC) AB = AN, ∠BAN = 150° − 90° = 60° ⇒

BAN — р/с. ∠BNC = 180° − 30° − 60° = 90°. Тогда △BNC = △NAD,

BC = ND = 2

Ответ: 2

8 — класс

41306263 — номер участника

лист 2 из 2

Задача 7 Пусть да. Тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=(abc+1)p^2$

Возьмем две скобки с мин. произведением. НУО это $(ab+a+1)(bc+b+1)$

$(ab+a+1)(bc+b+1) = abc + \ldots > abc\ p$

Значит каждые две скобки кратны ~~двум~~ p, иначе возьмем две не кратные p.

~~НУО~~ ~~тогда~~ две скобки кратны ~~двум~~ p, НУО это $ab+a+1$ и $bc+b+1$ (не обязательно, что при этом они минимальны, мы «отбрасываем» предыдущее утверждение)

~~$(ab+a+1)(bc+b+1) = ab^2c + ab^2 + ap + abc + ap + a +$~~

~~$+ bc+b+1 = p^2 \cdot \frac{abc+1}{xy} + xy$. Делители $abc+1$~~

~~Тогда $bc+b+1 - xy$~~

~~Задача 8~~