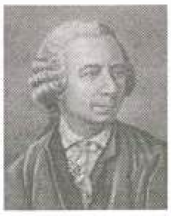


8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-8 - 1В
аудитория – посадочное место

41306285
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ Ен.	+ АЧ	∓ МК	
7 АЧ	7 ОЛ	7 ЯК	2 ВБ	23

Добавляйте олимпиаду в избранное на OLIMPIADA.ru

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№1

$1<k<7$. Рассмотрим первое число из k последовательных натуральных чисел, пусть оно a, тогда сумма k послед. чисел:

$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+k-1)=$$
$$=ak+1+2+\ldots+(k-1)=ak+\frac{k(k-1)}{2}$$

Для каждого $1<k<7$ напишем сумму чисел через первое число в послед. т.к. k кол-во послед натур чисел, то $k\in N$. ~~тл~~ Возможные случаи.

$k=2$: первое число в послед $x\in N$, сумма $2x+1$

$k=3$: первое число в послед $y\in N$, сумма $3y+3$

$k=4$: первое число в послед $z\in N$, сумма $4z+6$

$k=5$: первое число в послед $m\in N$, сумма $5m+10$

$k=6$: первое число в послед $n\in N$, сумма $6n+15$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Рассмотрим сумму при $k=2$ и $k=4$.

$2x+1$ и $4z+6$, при $x \in N$ и $z \in N$

$2x+1$ всегда нечетно, $4z+6$ всегда четно $\Rightarrow$ они не могут быть равны n одновременно.

$\Rightarrow$ ~~нельзя получить более 1 пятерки~~ n одновременно 2-хорошим и 4-хорошим быть не может $\Rightarrow$ максимум можно получить не более 1 пятерки за ($k=2$ или $k=4$ суммарно, т.к. обе одн. нельзя), 1 за $k=3$, 1 за $k=5$ и 1 за $k=6$, т.е. ≤ 4 пятерок.

Пример на 4 пятерки:

$n=45$

$k=2$: $22+23=45$

$k=3$: $14+15+16=45$

$k=5$: $7+8+9+10+11=45$

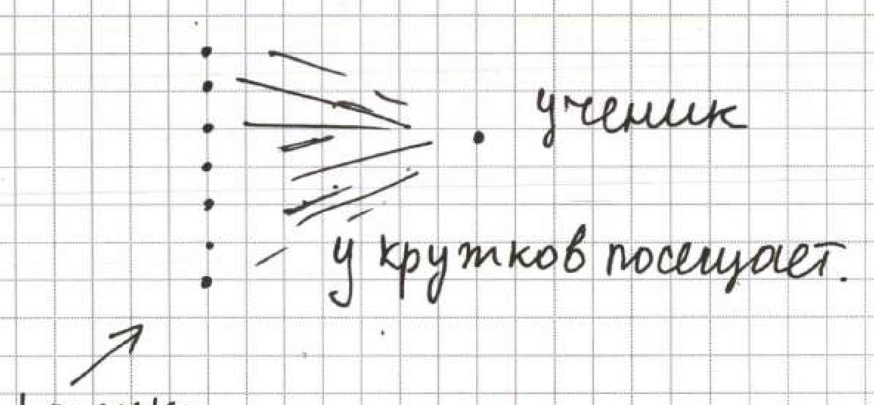
$k=6$: $5+6+7+8+9+10=45$

Ответ: 4 пятерки.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2

Рассмотрим пары кружков, их $\frac{6\cdot 7}{2}=21$. Посещают оба кружка в каждой паре 3 ученика, $21\cdot 3=63$. Найдём сколько раз мы посчитали каждого ученика. Пусть каждый посещает y кружков. Изобразим двудольный граф, ~~соединим~~, в одной доли вершины кружки, в другой ученики, соединим кружок и ученика ребром если ученик посещает кружок.



Рассмотрим пары ребер, всего $\frac{y(y-1)}{2}$ пар. Для каждой пары ребер выбрав соотв. пару кружков мы посчитаем ученика 1 раз, т.е. каждый ученик посчитан $\frac{y(y-1)}{2}$ раз.

(т.к. для каждой пары +1, всего $\frac{y(y-1)}{2}$ пар)
Пусть учеников x, тогда

$63 = \frac{y(y-1)}{2}x$

$126 = y(y-1)x$

Т.к. y кол-во кружков, которое посещает каждый, то $1 \le y \le 7$ (если все посещают 0 кружков, то для любых 2х кружков не найдутся 3 человека посещ. оба кружка, т.к. кружков всего 7, то $y \le 7$) и $y \in N$. Рассмотрим все варианты y:

$y=1$: $126=0$ нет реш	$y=2$: $126=2x$, $x=63$, но кол-во уч. ~~?~~ 60 не подх.	$y=3$: $126=6x$, $x=21$	$y=4$: $128=12x$, но $126 \not\vdots 12$, => x не целое т.к. нам нужно ~~кол-во...~~ подходит.
$y=5$: $126=20x$, $126 \not\vdots 20$, не подх.	$y=6$: $126=30x$, $126 \not\vdots 30$, не подх	$y=7$: $126=42x$, $x=3$, но кол-во уч > 6, не подх.	

Подходит только $x=21$.

+

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Пример на 21 ученика:

кружки

ученики	1	2	3	4	5	6	7
1	X	X	X				
2	X	X	X				
3	X	X	X				
4	X			X	X		
5	X			X	X		
6	X			X	X		
7	X					X	X
8	X					X	X
9	X					X	X
10		X		X		X	
11		X		X		X	
12		X		X		X	
13		X			X		X
14		X			X		X
15		X			X		X
16			X	X			X
17			X	X			X
18			X	X			X
19			X		X	X	
20			X		X	X	
21			X		X	X	

Если в клетке пересечения ученика и кружка стоит крестик, то этот ученик посещает этот кружок.

В табличке видно, что каждый ученик посещает по 3 кружка и для любых 2-х кружков найдутся ровно 3 ученика, которые посещают их оба.

Ответ: 21 ученик.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№3

1) $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{a(a-1)-1(a-1)}{b+c+1} =$

т.к

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$a^2-a = b+c-b^2-c^2$

$a(a-1)=b+c-b^2-c^2$

$= \frac{b+c-b^2-c^2-a+1}{b+c+1} =$

$= \frac{b+c+1-b^2-c^2-a}{b+c+1} = 1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}$

Аналогично:

$a^2+b^2+c^2=a+b+c$

$b^2-b=a+c-a^2-c^2$ | $c^2-c=a+b-a^2-b^2$

$b(b-1)=a+c-a^2-c^2$ | $c(c-1)=a+b-a^2-b^2$

$\frac{(b-1)^2}{c+a+1} = \frac{b(b-1)-1(b-1)}{c+a+1} =$

$= \frac{a+c-a^2-c^2-b+1}{c+a+1} =$

$= 1-\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} = \frac{c(c-1)-(c-1)}{a+b+1} = \frac{a+b-a^2-b^2-c+1}{a+b+1} =$$

$$= 1 - \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}$$

(2) $$\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} \geq \frac{(b^2+c^2+a)}{(b+c+1)+a} = \frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}$$

т.к. a, b, c неотриц, то

$$b+c+1 \leq b+c+1+a$$

$$\frac{1}{b+c+1} \geq \frac{1}{b+c+1+a}$$

(т.к. a, b, c неотриц, то знам $\geq 1 > 0$)

$$(b^2+c^2+a)\cdot\frac{1}{b+c+1} \geq (b^2+c^2+a)\frac{1}{a+b+c+1}$$

т.к. $(b^2+c^2+a) \geq 0$ и $\frac{1}{b+c+1} > 0$ и $\frac{1}{a+b+c+1} > 0$

Аналогично:

$$\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} \geq \frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1}$$

$$\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \geq \frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1}$$

(3) $$\frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \geq \frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1} + \frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{3+b^2+c^2+a+a^2+c^2+b+a^2+b^2+c}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{3\cancel{abc} + (a+b+c) + 2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+1} =$$

$\left(\text{т.к. } \underset{\text{по усл.}}{a^2+b^2+c^2 = a+b+c}\right) = \dfrac{3+3(a+b+c)}{a+b+c+1} = 3$

т.е. $\dfrac{3}{a+b+c+1} + \dfrac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + \dfrac{a^2+c^2+b}{a+c+1} + \dfrac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \geq 3$

4) $\dfrac{3}{a+b+c+1} \geq 3 - \dfrac{b^2+c^2+a}{b+c+1} - \dfrac{a^2+c^2+b}{a+c+1} - \dfrac{a^2+b^2+c}{a+b+1}$

$$\frac{3}{a+b+c+1} \geq \left(1 - \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}\right) + \left(1 - \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}\right) + \left(1 - \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}\right) = \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1}$$

т.е.

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \geq \frac{3}{1+a+b+c}$$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№4

~~Разобьем звенья на группы, в одной группе такие что прямые проходящие через звенья паралл~~

Разобьем звенья на группы, так что в каждой группе прямые, на которых лежат звенья паралельны. Тогда если звено пересекает другое под прямым углом, то они перп., т.е. в группе с (соотв прямыми), которые перп. данному звену мин. k прямых, аналогично для каждой группе с прямыми перп. ей мин k звеньев $\Rightarrow$ в каждой группе мин k звеньев, ~~если группа с прямыми~~ ~~в группе перп. ей звеньев 0~~. Если групп нечетное кол-во, то разобьем группы на пары, где в паре группы с соотв перп. прямыми, мин 1 группа будет без пары (т.к. неч их кол-во) $\Rightarrow$ k макс $=0$.

А если (вдруг?!)) одна "прямоуг." прямой ≥ 2 звеньев

Если ~~было~~ при четном k у ~~одного~~ одной из групп нет пары, то $k=0$. Рассмотрим случаи, когда ~~таких~~ групп без пары нет. Если групп 2, то ~~они~~ соотв. прямые перп. друг другу, ~~т.к.~~ т.е. любые ~~два~~ соседних звена перп. друг другу, тогда $k=0$, т.к. пересечение звеньев друг другом невозможно. ~~т.к.~~ ~~т.к.~~ т.к. ~~длина~~ длина звеньев одинакова, то рассмотрев сетку со стор. || ~~одному~~ соотв. прямых в группах, ~~и~~ ~~длинами~~ ~~звен~~ и ед. отр. равной длине звеньев, то ~~звенья расположены~~ звенья располог. только по линиям сетки. Если групп 4, в каждой минимум k, то всего звеньев $1000 \geq 4k \Rightarrow k \leq 250$.

Доказана оценка

7+

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

4

$$\frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} + \frac{a^2+b^2+c}{1+a+b} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1} + \frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1} = \frac{3+b^2+c^2+a+a^2+c^2+b+a^2+b^2+c}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{3+a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+1} =$$

т.к. $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$

$$= \frac{3+3(a+b+c)}{a+b+c+1} = 3$$

из 4 т.е.

$$\frac{3}{a+b+c+1} + \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+b^2+c}{1+a+b} \geqslant 3$$

$$\Rightarrow \frac{3}{a+b+c+1} \geqslant \left(1 - \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1}\right) + \left(1 - \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}\right) +$$

$$+ \left(1 - \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}\right) = \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} +$$

$$+ \frac{(c-1)^2}{a+b+1}$$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$$\frac{(c-1)^2}{a+b+1} = \frac{c(c-1)-(c-1)}{b+a+1} =$$

$$= \frac{a+b+c-a^2-b^2-c+1}{b+a+1} = 1-\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1}$$

1) $$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{1+a+b+c}$$

2) $$1-\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + 1-\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} + 1-\frac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \leq$$

$$\leq \frac{3}{1+a+b+c}$$

3) $$3 \leq \frac{3}{1+a+b+c} + \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} + \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} +$$

$$+ \frac{a^2+b^2+c}{1+a+b}$$

$$\frac{b^2+c^2+a}{b+c+1} \geq \frac{b^2+c^2+a}{b+c+1+a} = \frac{b^2+c^2+a}{a+b+c+1}$$

т.к. a, b, c не отриц, то

$$b+c+1 \leq b+c+1+a$$

$$\frac{1}{b+c+1} \geq \frac{1}{b+c+1+a}$$

$$\Rightarrow (b^2+c^2+a)\cdot\frac{1}{b+c+1} \geq (b^2+c^2+a)\cdot\frac{1}{b+c+1}$$

Аналогично:

$$\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1} \geq \frac{a^2+c^2+b}{a+c+1+b} = \frac{a^2+c^2+b}{a+b+c+1}$$

$$\frac{a^2+b^2+c}{1+a+b} \geq \frac{a^2+b^2+c}{1+a+b+c} = \frac{a^2+b^2+c}{a+b+c+1}$$

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

8

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-8 - 1В
аудитория – посадочное место

41306285
номер участника

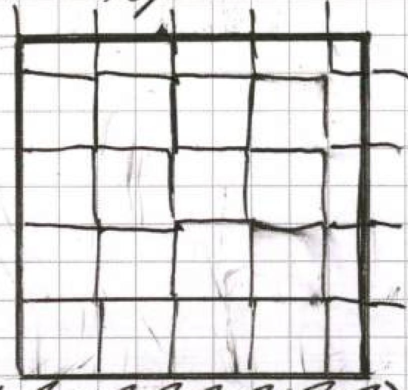
5	6	7	8	Σ
+ АД	+ МС	– А.П.	– КА	
7 ПР	7 КН	1 МС	0 МК	15

Добавляйте олимпиаду в избранное на OLIMPIADA.RU

№5

Разобьём доску 30×30 на непересекающиеся квадраты 2×2, их $15\cdot15=225$. В каждом квадрате не более 1 короля, т.к. иначе они бьют друг друга. ~~Рассмотрим произвольный~~

Предположим, есть квадрат 9×9, в котором менее 11 королей. В нем полностью находятся 16 квадратов, на которые мы разбили доску.

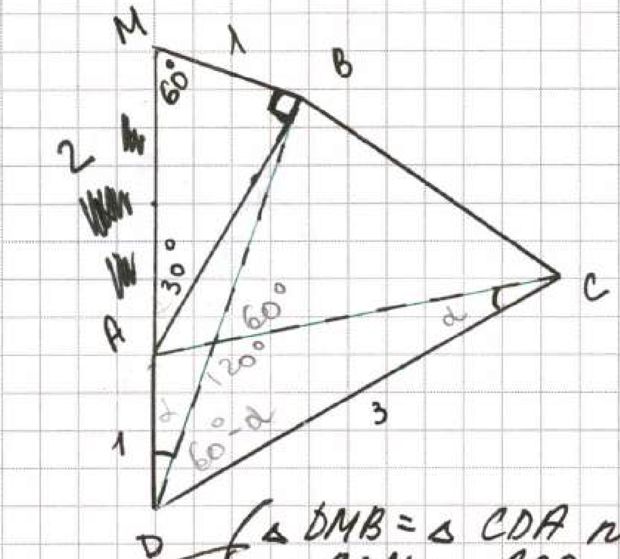


Т.к. королей <11, то >5 квадратов пусты, т.к. иначе не пустых квадратов ≥ 11 и королей ≥ 11.

Рассмотрим доску 30×30, в ней минимум 6 квадратов пусты (т.к. их >5) $\Rightarrow$ королей не более $225-6=219$, т.к. в каждом квадрате не более 1, но их 220, противоречие. Тогда такой квадрат 9×9 не найдётся, т.е. в любом квадрате 9×9 не менее 11 королей.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№6



Дано:
Вып 4уг ABCD,
диаг BD = AC,
∠ADB = ∠ACD,
CD = 3, AD = 1,
∠BAD = 150°
Найти: BC

(△DMB = △CDA по СУС (∠BDM = ∠ACD по усл, AC = BD по усл, MD = CD = 3 по постр.) => MB = DA = 1

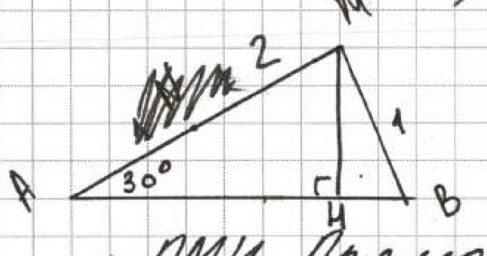
Продлим (AD), т. M за т. A, так что DM = 3

Рассмотрим △AMB

∠AMB смежный с ∠BAD

$\angle AMB = 180° - \angle BAD = 180° - 150° = 30°$

∠MAB



Если угол ABM ≠ 90°, то опустим MH ⊥ AB, H ∈ (AB). Тогда

△AMH прямоуг => напротив угла в 30° $MH = \frac{1}{2} AM = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$. Тогда

△HMB р/б с углом 90° (MH = MB = 1), противоречие, тогда ∠ABM = 90°.

$\Rightarrow \angle DMB = 180° - \angle MAB - \angle ABM = 180° - 30° - 90° = 60°$.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306285 — номер участника

лист 3 из 5

~~ΔABC = Г~~

~~ΔADC = ΔBMD по ССС (MB = DA = 1 по постр, CA = MD = 3 по постр., BD = AC по усл.)~~

Из равенства ΔDMB = ΔCDA

$\angle ADC = \angle DMB = 60°$

Рассмотрим Δ MDC, он р/б, т.к. MD = DC = 3 с углом 60° при вершине, т.е. р/стр. ⇒ MC = 3 и $\angle DMC = 60°$, но угол DMB = 60° ⇒ B ∈ [MC] ⇒

BC = MC − BM = 3 − 1 = 2

Ответ: BC = 2.

№8

Рассмотрим самые тяжелые 24 гири, их ~~уравновешивают~~ с таким же суммарным весом или 25 гирь, или 26 гирь, т.к. каждая гиря тяжелее оставшихся.

Если их 25, то попробуем уравновесить их, т.к. самые легкие, уравновешиваем меньшим числом, т.е. убрали мин 1 тяжелую, если 2, то было равенство и убрали больше, чем положили ⇒ убрали 1.

Нет
уравновесить.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№7

Пусть это возможно, обозначим это простое число k, тогда

~~[illegible]~~

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=k^2(abc+1)$

~~Без ограничения общности [illegible]~~

~~[illegible]~~ Если одна из скобок $\vdots k^2$, то произведение остальных двух больше $abc+1$, тогда ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ произведение $> k^2(abc+1)$ (одна из скобок $\geq k^2$, ~~[illegible]~~ произв. ост $> (abc+1)$)

$(bc+b+1)(ab+a+1)=$ ~~[illegible]~~

$= \underbrace{bc(ab+a+1)}_{\geq ab^2c \geq abc} + \underbrace{b(ab+a+1)}_{\geq 1} + \underbrace{1(ab+a+1)}_{\geq 1} =$

$> abc+2$

С остальными скобками аналог.

$\Rightarrow$ какие-то 2 скобки точно $\vdots k$ (т.к. k простое)

Без ограничения общности пусть

$ab+a+1 \vdots k$

$ab+a+1=xk$

и $bc+b+1 \vdots k$

$bc+b+1=yk$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306285 — номер участника

лист 5 из 5

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$a=1 \quad b=1$

$3 \cdot (c+2)(2c+1) = \ldots$

$\vdots 3 \Rightarrow c+1 \vdots 3$

$c = \frac{\ldots}{3} - 1$

Рассмотрим 24 самые тяжелые гири. Если их уравновесить 25

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) =$
$= xyk^2(ca+c+1) = k^2(abc+1)$

xy - дел $abc+1$

вычтем k^2

$k^2(xyca + cxy + xy - 1) = k^2(abc)$

$xyca + cxy + xy - 1 = abc$

$xy(ca+c+1) - 1 = abc$

$xy(ca+c+1) = abc+1$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) =$

$= a(b+1)(b(c+1)+1)(c(a+1)+1) + b(c+1)+1+c(a+1)+1$

k^2

abc