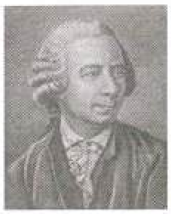
Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



8

Технический лист
День 1

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-8 - ....
аудитория – посадочное место

41306266
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ Ем.	+ Тк	∓ ВБ	
7 АЮ	7 ЕЗ	7 И.Б.	2 МК	23

№ 1

У Вани число n. Пусть оно представимо и в виде суммы 2 посл. чисел, и в виде суммы 4х посл. чисел одновременно

2 числа, пусть первое — x:

$x+(x+1)=n \Rightarrow n=\underset{нат.}{2x}+1 \Rightarrow n$ - нечётное

4 числа, первое — y

$y+(y+1)+(y+2)+(y+3)=n \Rightarrow n=\underset{нат.}{\overset{(2y+3)\cdot 2}{4y+6}} \Rightarrow n$ - чётное

n - разных чётностей — противоречие.

Значит, Ваня мог получить не более 4 пятерок: чисел 5, одно точно не подходит.

Пример на 4: 45

45 = 22 + 23 - 2 числа

45 = 14 + 15 + 16 - 3 числа — 4 пятёрки

45 = 7 + 8 + 9 + 10 + 11 - 5 чисел

45 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 - 6 чисел

Ответ: 4 пятёрки

№ 2

Пусть каждый посещает 1 кружок. Посмотрим на произвольный кружок, в нём k учеников. Эти k учеников на другие кружки пошли в сумме 18 раз

№2 (продолжение)

(т.к. из этого кружка в каждый из 6 других ходит по 3 человека; $3\cdot 6=18$). У k учеников всех походов по кружкам $1\cdot k$: каждый ходит ровно в 1 кружок, значит:

$\cancel{1\cdot}k+18=1\cdot k \Rightarrow 18=(1-1)k=0k$ - противоречие
значит, такого быть не может, не 1 кр.

Если каждый посещает 2 кружка, то проделываем то же самое, тогда: $k+18=2\cdot k \Rightarrow$
$\Rightarrow k=18$. А т.к. мы это доказали для произвольного кружка, то в каждом ровно 18 человек, тогда в классе людей:

$\frac{18\cdot 7}{2}=63>60$ - противоречие, 2 кружка тоже невозможно
2 ← каждый посещает 2 кружка

Если каждый посещает 3 кружка, то в произв. кружке: $k+18=3\cdot k \Rightarrow k=9$ - 9 человек. Тогда всего людей: $\frac{9\cdot 7}{3}=21$ человек - пока оставим этот вариант

Если 4 кружка, то: $k+18=4\cdot k \Rightarrow k=6$ - в каждом кружке
тогда всего людей: $\frac{6\cdot 7}{4}$ - ~~недопустимо~~ нецелое - противоречие такого не может быть

Если 5 кружков, то $k+18=5\cdot k \Rightarrow k=\frac{18}{4}$ - нецелое противоречие

Если 6 кружков, то $k+18=6\cdot k \Rightarrow k=\frac{18}{5}$ - нецелое

Если 7 кружков, то $k=18=7\cdot k \Rightarrow k=3$, тогда людей в классе $\frac{3\cdot 7}{7}=3<6$ - противоречие.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306266 — номер участника

лист 3 из 6

№2 (продолжение)

Значит, единственно возможный вариант - 21 человек (каждый ходит на кол-во кружков, но не больше 7, при этом хотя бы 1, иначе не было бы пересеч. в 3)

Пример на 21:

Объединим детей в 7 групп: a, b, c, d, e, f, g.

Группа a: 1, 2, 3 - номера детей по порядку

Группа b: 4, 5, 6; группа c: 7, 8, 9; d - 10; 11; 12.

e - 13; 14; 15. f - 16; 17; 18. g - 19; 20; 21

I кружок: a b c

II кружок: a d e

III кружок: a f g

IV кружок: b d f

V кружок: c d g

VI кружок: e b g

VII кружок: c e f

~~Итак~~ В 2 группах разные дети, каждая группа встречалась по 3 раза => каждый ребенок ходит на 3 кружка; в двух кружках 1 общая группа => 3 общих ребёнка, что надо было в условии

Ответ: 21 ученик

№3

Сравним первую дробь с 1: $(a-1)^2 \geq 0$; $b+c+1>0$.

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \vee 1 \overset{b+c+1>0}{\Leftrightarrow} (a-1)^2 \vee b+c+1 \Leftrightarrow a^2-2a+1 \vee b+c+1 \Leftrightarrow$ (т.к. $a+b+c=a^2+b^2+c^2$)

$\Leftrightarrow a^2-a+1 \vee a+b+c+1 \Leftrightarrow a^2-a+1 \vee a^2+b^2+c^2+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a \vee b^2+c^2$; $-a \leq 0$ (a-неотр.); $b^2+c^2 \geq 0$ - квадраты.

№3 (продолжение)

Значит, $-a \le b^2+c^2 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le 1$.

А т.к. задача симметрична отн. a, b, c, то все первые 3 дроби меньше 1 (неотриц. числителя и полож. знамен.

Заметим, что: $\frac{z+x}{z+y} \ge \frac{x}{y}$ при $z \ge 0$, $x \ge 0$; $y > 0$; $x \le y$.

Док-во:

Посмотрим на разницу:

$$\frac{z+x}{z+y} - \frac{x}{y} = \frac{zy+xy-xz-xy}{zy+y^2} = \frac{z(y-x)}{zy+y^2} \ge 0$$ (числитель неотр., знам. положительный)

Значит, первая дробь $\ge$ второй дроби.

А т.к. $a \ge 0$; $(a-1)^2 \ge 0$; $b+c+1 > 0$; $b+c+1 \ge (a-1)^2$, доказали.

то $\frac{a+(a-1)^2}{a+b+c+1} \ge \frac{(a-1)^2}{b+c+1}$

Аналогично: $\frac{b+(b-1)^2}{a+b+c+1} \ge \frac{(b-1)^2}{c+a+1}$

Аналогично: $\frac{c+(c-1)^2}{a+b+c+1} \ge \frac{(c-1)^2}{a+b+1}$

Значит: $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{c+a+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le$

$$\le \frac{a+(a-1)^2+b+(b-1)^2+c+(c-1)^2}{a+b+c+1} = \frac{a+b+c+a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3}{a+b+c+1} =$$

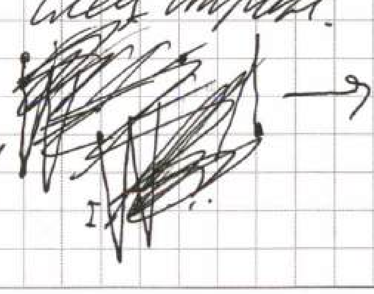
$$= \frac{a+b+c+a+b+c-2(a+b+c)+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1},$$ что и требовалось в условии.

№ 4

Будем называть два звена одного вида, если прямые, на которых находятся звенья, параллельны, а разных видов, если прямые пересекаются. Рассмотрим соседние звенья, между которыми угол не 90°. (если таких нет, то из-за одинаковости звеньев можем подобрать клетчатое поле так, что все звенья лежат на линиях сетки и равны стороне клетки, тогда $k=0$). И ещё 2 звена ~~прямые~~, перпендикулярных первым двум. Все эти звенья есть при $k>0$ и они разных видов, значит, видов ≥ 4 => какого-то вида ≤ 250 звеньев. Возьмём звено ~~прямую~~, перпендикулярное этому виду. Его пересекают ≤ 250 звеньев, ~~т.к.~~ они все из этого вида, значит, $k \leq 250$.

след. стран.

Пример: Возьмём 2 точки:



и соединим их 63 звеньями I вида и 62 звеньями II вида:

№4 (продолжение)

Таким образом:

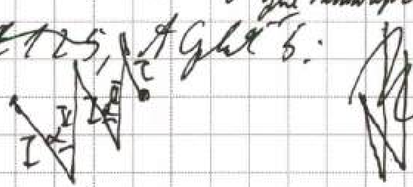
II вид - вертикаль
I - как на рисунке ?!

а?

При очень большой длине однозначно!

+i4 длине для 2 определяется однозначно. Пример не даёт 125, а для 6:

?

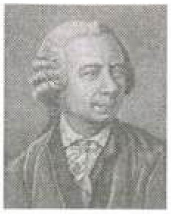


потом повернём эту конструкцию на 90°, пусть это конструкция №1, тогда строим оставшиеся 3: №1 №4 №2 №3

А если нет?

т.к. длина достаточно большая, а вторые подобные конструкции находятся в пределах квадрата, то звенья противоположных видов не пересекают друг друга. Звеньев каждого вида 62+63+62+63=250, тогда всего звеньев 125·4=1000, 500 k при этом равно 250, длина достаточно большая - значит, для стороны квадрата все звенья пересекают противоп. стороны квадрата, не в вершинах. Таким образом, в этом построении k=250

Ответ: k=250.



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-8 - 3-6
аудитория – посадочное место

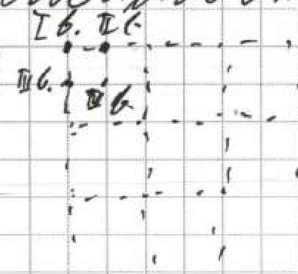
41306266
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ вс	+ мс	— 4ш	∅ мк	
7 АД	7 рх	0 вс	∅ АД	14

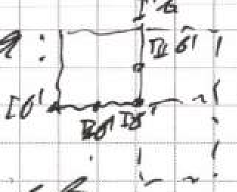
Добавляйте олимпиаду в избранное на OLIMPIADA.RU

№5

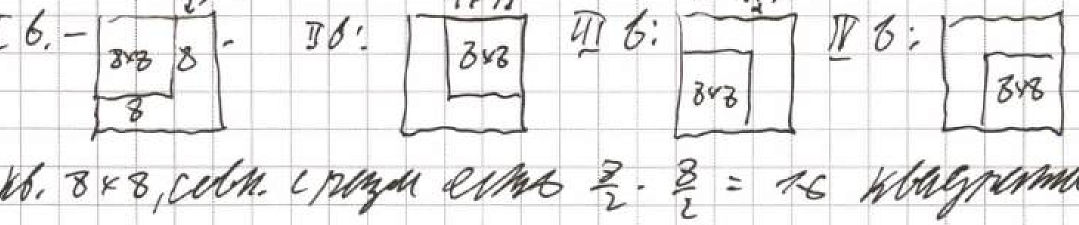
Доску 30×30 можно разбить на $[\frac{30}{2}]\cdot[\frac{30}{2}] = 225$ квадратов 2×2. Заметим, что в квадрате 2×2 стоит не более 1 короля, т.к. в квадрате 2×2 у любых 2 клеток есть общая точка => короли на любых двух клетках будут бить друг-друга. А т.к. королей 220, то пустых квадратов 2×2 не более 5 (225-220). Заметим, что в любом квадрате 9×9 есть 16 квадратов 2×2 из исходного разбиения (есть 4 разных вида взятия квадрата в зависимости от левого верхнего угла:



, остальные 5 получаются, если взять другой кв. 2×2 для наблюдения:



В каждом из четырёх в-ов есть квадрат 8×8, совпадающий с разметкой:



В кв. 8×8, совп. с разм. есть $\frac{8}{2}\cdot\frac{8}{2} = 16$ квадратов. Из них ≤ 5 пустых => в остальных ≥ 11 есть по королю, значит, королей ≥ 11.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

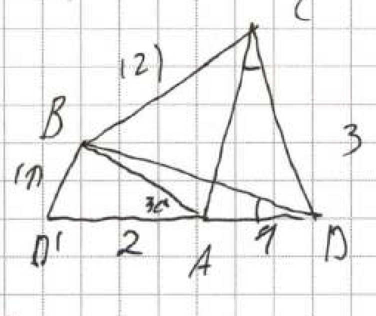
8 — класс

41306266 — номер участника

лист 2 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

N 6



Отметим D' на прямой AD за точку A, что $AD' = 2$. Тогда $\triangle BDD' = \triangle ACD$, т.к. $BD = AC$; $\angle BDD' = ACD$; $CD = DD' = 3$.

Значит, $BD' = 1$. А также $\angle BAD' = 180° - 150° = 30°$. Тогда если взять тр-к с $30°, 60°, 90°$ углами и гипотенузой 2, то ~~этот~~ либо эти 2 треугольника равны, либо $\angle D'BA + 90° = 180°$, по четвёртому признаку равенства. Но $\angle D'BA = 180° - 90° = 90°$; $90° = 90° \Rightarrow \triangle D'BA$ точно равен тр-ку с углами $30°, 60°, 90°$ и гипотенузой 2 $\Rightarrow \angle BD'A = 60°$; А т.к. $\triangle BD'D = \triangle ACD$, то $\angle CDA = \angle D'D'B = 60°$. А т.к. $D'D = CD = 3$, то $\triangle D'DC$ - равносторонний $\Rightarrow \angle CD'D = 60°$; $CD' = 3$, то $\angle BD'D = 60° \Rightarrow B$ лежит на луче $D'C$. А т.к. $D'B = 1$, то $BC = D'C - D'B = 3 - 1 = 2$

Ответ: $BC = 2$

N 7

Для начала заметим, что:

$$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = (abc+1)(abc+ab$$

$$= (abc+1)\left(abc + ab + ac + bc + 2a + 2b + 2c + 3 + \frac{(bc-1)(c+1) + (ab-1)(b+1) + (ca-1)(a+1)}{abc+1}\right)$$

Вторая скобка $> 4 \Rightarrow p$ - неч.

№7 (продолжение)

Также НОД$(ab+a+1; abc+1)$ = НОД$(ab+a+1; abc+1-c(ab+a+1))$ =
= НОД$(ab+a+1; 1-ac-c)$ = НОД$(ab+a+1; ac+c-1)$

Аналогично: $\begin{cases} \text{НОД}(ac+c+1; abc+1) = \text{НОД}(ac+c+1; bc+b-1) \\ \text{НОД}(bc+b+1; abc+1) = \text{НОД}(bc+b+1; ab+a-1) \end{cases}$

Пусть эти НОДы равны $d_A; d_C; d_B$. Также пусть $abc+1 \vdots 2 \Rightarrow \begin{cases} a - Н \\ b - Н \\ c - Н \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab+a+1 - Н \\ ac+c+1 - Н \\ bc+b+1 - Н \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_A - Н \text{ ели } \\ d_C - Н, abc+1 - Н, \\ d_B - Н \text{ то } d_A - Н; \\ d_C - Н; d_B - Н \text{ так как} \end{cases}$

А также в любой паре d есть 2 числа из разных скобок с разностью $2 \Rightarrow \begin{cases} \text{НОД}(d_A; d_B) \le 2 \\ \text{НОД}(d_A; d_C) \le 2 \\ \text{НОД}(d_B; d_C) \le 2 \end{cases}$ (+)

и т.к. все d − Н, то все d попарно взаимнопросты, а т.к. это всё − делители $abc+1$ и $d_A \cdot d_B \cdot d_C \vdots abc+1$, то
это верно
$d_A \cdot d_B \cdot d_C = abc+1$. Тогда $\frac{ab+a+1}{d_A} \cdot \frac{ac+c+1}{d_C} \cdot \frac{bc+b+1}{d_B} = p^2$

Значит, это либо $p^2, 1, 1$ в некотором порядке, либо $p; p; 1$ в некотором порядке.

Но если это $p^2, 1, 1$, то $abc+1 \vdots$ произв. 2х скобок, но (пусть; также здесь $ab+a+1$ − наиб. скобка, то т.е. произв. $(bc+b+1)(ca+c+1)$ ~~abc+1~~, но
но $(bc+b+1)(ca+c+1) = abc^2 + bc^2 + bc + abc + \cancel{bc} + b + ac + c + 1$,
но $ab^2c + bc^2 > abc+1$; $abc+1 = 1$; а ост. ~~(это)~~ множители $> 0 \Rightarrow (bc+b+1)(ca+c+1) > abc+1$!!!

Значит, это $p, p, 1$ в некотором порядке. (×)

Это доказано только если $abc+1 \vdots 2$

№7 (продолжение)

Пусть $ab+a+1$; $bc+b+1$; $ca+c+1$ — это A, B, C в нек. порядке, что: $(A; C-2) = \frac{A}{p}$; $(C; B-2) = \frac{C}{p}$; $(B; A-2) = B$.
Тогда $A-2 \vdots B$; $CP-2P \vdots A$; $BP-2P \vdots C$. Но т.к.
$2B > A \Rightarrow A-2 = B$, аналогично $CP-2P = A$; $BP-2P = C$,
тогда $CP-2P = B+2 \Rightarrow BP-2P = (CP-2P-2)P-2P =$
$= CP^2-4P^2-4P = C$, тогда $(C-4)P^2-4P-C=0$
$D = 16+4C^2(C-4)^2 = \cancel{16+4C^2(C^2-8C+16)} =$
$= \cancel{16+4C^4-32C^3+48C^2}$
$\sqrt{D} = \sqrt{4^2+(2C(C-4))^2}$, но тогда $\sqrt{D} = \sqrt{1+(C(C-4))^2}$,
пусть $D = x^2$, тогда $x^2 = 1+(C(C-4))^2$; пусть
$C(C-4) = y$, тогда $x^2-y^2 = 1 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 1$,
но $x+y \in N \Rightarrow \underset{x+y>1}{x+y \geq 1}$; $x \neq y$ значит, выражение не может быть больше 1 ($x=y$ не подх.), а такого быть не может !!, значит ситуация $D; p; 1$ — тоже невозможна, а других ситуаций нет.
Ответ: нет, не могло.

Нет случая $abc+c \vdots 2$.