Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 14

7 АС

+ УТМ

Ответ: 4

Пример: $n = 45$

Тогда Вася получит пятёрки за $k = 2, 3, 5$ и 6, т.к. $45 = 22 + 23$ (т.е. 2-хорошее), $45 = 14+15+16$ (3-хорошее), $45 = \cancel{8}\,7+8+9+10+11$ (5-хорошее) и $45 = 5+6+7+8+9+10$ (6-хорошее), и 45 – не 4-хорошее, т.к. иначе $45 = (m+1)+(m+2)+(m+3)+(m+4) = 4m+10$ при некотором целом $m \Rightarrow 35 = 45-10 = 4m \Rightarrow 35$ делится на 4 ?! $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при всех k $(1<k<7)$, кроме 4 Вася получит по пятёрке – итого 4 пятёрки.

Оценка: Предположим, что при некотором n Вася может получить больше четырёх пятёрок. Но ~~чисел~~ натуральных чисел от 1 до 7 (не включительно) всего 5 – это 2, 3, 4, 5 и 6. Тогда, если Вася получил >4 пятёрок (т.е. ≥ 5), то он получил ровно 5 пятёрок. Тогда n – 2-хорошее, т.е. $\exists\, x \in \mathbb{N}$: $n = x+(x+1) = 2x+1$ – тогда n нечётно. Но т.к. Вася получил 5 пятёрок, то n и 4-хорошее, т.е. $\exists\, y \in \mathbb{N}$ $n = y+(y+1)+(y+2)+(y+3) = 4y+6 = 2(2y+3)$ – тогда n чётно, но n нечётно, т.к. n – 2-хорошее ?! $\Rightarrow$ Вася получил ≤ 4 пятёрок.

Противоречие

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

+ ВД 7

Ответ: 21.

Решение: Пусть в классе n учеников, и каждый посещает ровно d кружков. Заведём ~~граф, где~~ двудольный граф, где вершины одной доли — ученики класса, а вершины другой доли — кружки, и ребро между учеником A и кружком X проводится тогда и только тогда, когда A ~~занима~~ посещает X. Тогда вершин в доле с учениками ровно n, и степень каждой — $d \Rightarrow$ Рёбер между долями ровно nd. Для каждой пары кружков X и Y по усл. $\exists$ ровно 3 ученика A, B, C посещ. их оба. Тогда для $\forall$ пары кружков X, Y отметим ребра XA, YA, XB, YB, XC, YC. ~~т.е для каждой пары вершин-кружков отметим~~ Тогда ~~всего будет~~ $\forall$ пары в-н — кружков будет отмечено 6 рёбер, т.е. всего будет $C_7^2 \cdot 6 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 21 \cdot 6 = 126$ отметок. Т.к. для пары кружков X, Y $\exists$ A, посещ. их обоих, то ст. $A \geq 2 \Rightarrow d \geq 2$.

Рассм. произв. ребро AX (A — ученик, X — кружок). Докажем, что оно было отмечено $d-1$ раз: Обозн. за $V_1, V_2, \ldots, V_{d-1}$ — ост. $d-1$ кружков, которые посещает A. Тогда если ребро AX было отмечено для пары кружков, то в этой паре есть X, а ~~второе вна этой~~ второю вершину этой пары обозн. за Z. Т.к. в графе должно быть ребро AZ, то $Z \in \{V_1; V_2; \ldots; V_{d-1}\}$, и $\forall$ $i \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq d-1)$ для пары X, V_{i-1} отмечено ребро AX — тогда всего подх. Z ровно $d-1$, и тогда ребро AX отмечено ровно $d-1$ раз.

Тогда т.к. AX — произв. ребро ~~(...)~~, то $\forall$ ребро было отмечено ровно $d-1$ раз. А всего рёбер $nd \Rightarrow$ всего $nd(d-1)$ отметок.

Тогда $126 = nd(d-1) = n(d^2-d)$, и $2 \leq d \leq 7$ (т.к. всего 7 кружков) $d=1?$

Но $d \neq 2$, т.к. иначе $d^2-d = 4-2 = 2$, и $\underset{\text{ученик}}{n} = \frac{126}{d^2-d} = \frac{126}{2} = 63 > 60$?! противоречие

$d \neq 4$, т.к. ~~иначе~~ $126 = nd(d-1) \vdots d$, и если $d = 4$, то $126 \vdots 4$?! – Противоречие

$d \neq 5$, т.к. иначе $126 = nd(d-1) \vdots d$, и если $d = 5$, то $126 \vdots 5$?! Противоречие

$d \neq 6$, т.к. иначе $126 = nd(d-1) \vdots d-1$, и если $d = 6$, то $126 \vdots \underset{6-1}{5}$?! Противоречие

$d \neq 7$, т.к. иначе $126 = n \cdot d \cdot (d-1) = n \cdot 7 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{126}{7 \cdot 6} = \frac{7 \cdot 3 \cdot 6}{7 \cdot 6} = 3 < 6$?! (по усл. учеников > 6). Противоречие

Т.к. $d \neq 2, 4, 5, 6, 7$, но $d \in [2; 7]$, то $d = 3$. Тогда

$d^2 - d = 9 - 3 = 6 \Rightarrow n = \frac{126}{d(d-1)} = \frac{126}{d^2-d} = \frac{126}{6} = 21$,

и $6 < 21 < 60$ – верно. Тогда в классе $n = 21$ ученик.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 14

Доказательство: $a^2+b^2+c^2=a+b+c \Rightarrow a^2-a+b^2-b+c^2-c=$
$=0 \Rightarrow \cancel{(a-1} \; a^2-a=b+c-b^2-c^2 \Rightarrow (a-1)^2=a^2-2a+1=$
$=(a^2-a)\cancel{+(a-1)}-a+1=b+c+1-a-b^2-c^2.$

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}=\frac{b+c+1-(a+b^2+c^2)}{b+c+1}=1-\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}.$

Аналог. $\frac{(b-1)^2}{a+c+1}=1-\frac{b+a^2+c^2}{a+c+1}$, $\frac{(c-1)^2}{a+b+1}=1-\frac{c+a^2+b^2}{a+b+1}$

Тогда (!) $\frac{3}{1+a+b+c} \geqslant \frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}=$

$=1+1+1-\left(\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}+\frac{b+a^2+c^2}{a+c+1}+\frac{c+a^2+b^2}{a+b+1}\right)$

$\overset{*}{\Leftrightarrow}$ (!) $\cancel{3}$ $\frac{3}{1+a+b+c}+\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}+\frac{b+a^2+c^2}{a+c+1}+\frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \geqslant$
$\geqslant 3.$

Т.к. $a \geqslant 0$, то $a+b+c+1 \geqslant b+c+1 \Rightarrow \frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} \geqslant \frac{a+b^2+c^2}{a+b+c+1}.$
$a+b^2+c^2 \geqslant 0$
$\geqslant 0 \quad \geqslant 0$

Аналогично $\frac{b+a^2+c^2}{a+c+1} \underset{\text{т.к. } b\geqslant 0}{\geqslant} \frac{b+a^2+c^2}{a+b+c+1}$, $\frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \underset{\text{т.к. } c\geqslant 0}{\geqslant} \frac{c+a^2+b^2}{a+b+c+1}.$

Тогда $\frac{3}{1+a+b+c}+\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}+\frac{b+a^2+c^2}{a+c+1}+\frac{c+a^2+b^2}{a+b+1} \geqslant$

$\geqslant \frac{3}{1+a+b+c}+\frac{a+b^2+c^2}{a+b+c+1}+\frac{b+a^2+c^2}{a+b+c+1}+\frac{c+a^2+b^2}{a+b+c+1}=$

$=\frac{3+a+b+c+2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c+1}=\frac{3+(a+b+c)+2(a+b+c)}{a+b+c+1}=\frac{3+3a+3b+3c}{1+a+b+c}=3.$

по $\overset{*}{\Leftrightarrow}$ $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leqslant \frac{3}{1+a+b+c}$. Доказано.

+ ИМ

7 ММ

Задача № 4 Лист 1 из 2 Номер участника: 14

~~Ответ: При $k=250$.~~ Продвижение: Докажем, что $k \le 250$.

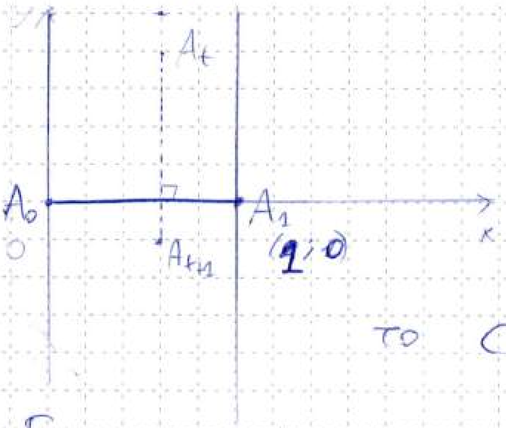
Продвижение $k \le$ ~~Оценка:~~ Оценка на $k \le 250$: Предположим, что это может случиться при каком-то $k > 250$. Разобьём все звенья на классы экв-ти, где эквивалентность 2 звеньев a и b $\Leftrightarrow$ $a \parallel b$ ($\forall$ звена a $a \parallel a$, если $a \parallel b$, то $b \parallel a$ и если $a \parallel b \parallel c$, то $a \parallel c \Rightarrow$ к.э.). Т.к. $k > 250$, то $\forall$ звена есть ≥ 1 звено $\perp$ ему, ~~т.е. $\forall$~~ а т.к. если $a \perp b \perp c$, то $a \parallel c$, то к.э. разбиваются на пары, где $\forall$ 2 звеньев a и b в одной паре к.э. (но разных классах экв) ~~они~~ $a \perp b$. Тогда в $\forall$ классе экв-ти X $\geq k$ ~~≥ 250~~ звеньев (т.к. иначе для звена $c \in Y$, где Y — к.э. в паре с X, кол-во звеньев $\perp c$ — $< k$ (?!)).

Т.к. $k > 250$, то в $\forall$ к.э. > 250 звеньев, а всего 1000 звеньев и $\forall$ — ровно в одном к.э. Тогда всего к.э. $< \frac{1000}{250} = 4$, т.е. кол-во к.э. ≤ 3. Но все к.э. разбились на пары разных (т.к. если ~~один~~ класс T попал в пару с самим собой, то для звеньев $a, b \in T$, $a \perp b$ и $a \parallel b$ (?!)) $\Rightarrow$ их чётное кол-во и $\le 3 \Rightarrow$ их ровно 2. Тогда $\forall$ звеньев a, b $a \perp b$ (если в разных к.э.) или $a \parallel b$ (если в одном к.э.), и $a = b$. Обозн. произв. звено за 1-е, его концы за A_0 и A_1, и заведём декартову систему координат с центром в A_0 и размером ед. клетки равным A_0A_1 (длина $\forall$ звена) (коорд. A_0 $(0;0)$, коорд. A_1 $(1;0)$). Т.к. $\forall$ 2 звена $\perp$ или $\parallel$, то $\forall$ 2 сос. звена $\parallel$ или $\perp$ друг другу $\Rightarrow$ ~~$\forall$~~ Занумеруем звенья в порядке движ. по ломаной с 1-го ($A_0 \to A_1$), 2, ..., 1000, а и $\forall 1 \le i \le 999$, $i \in \mathbb{N}$, концы i-го звена обозн. за A_{i-1} и A_i (для 1000-го — это A_{999} и A_0, т.к. ломаная замкнутая). Тогда $\forall A_j$ коорд. A_j — ~~неточные~~ целые числа (т.к. A_0 $(0;0)$, ~~при~~ ~~а~~ если $A_i(x;y)$, где $x, y \in \mathbb{Z}$, то $A_{i+1}(x \pm 1; y)$ или $A_{i+1}(x; y \pm 1)$, т.к. $A_iA_{i+1} \perp A_0A_1$ или $A_iA_{i+1} \parallel A_0A_1$ (и $A_0A_1 = A_iA_{i+1}$)).

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 4 Лист 2 из 2 Номер участника: 14

Тогда ~~A_0A_1~~ $\forall A_0A_1$ по усл. пересек. ≥ 1 звено $\perp$ ему — обозн. за A_tA_{t+1}. Т.к. у A_0, A_1, A_t, A_{t+1} целочисл. коорд., и $A_tA_{t+1} \perp A_0A_1$,



то коорд. точек A_t и A_{t+1} $\overset{\text{равны}}{\leftrightarrow}$ $(c;d)$ и $(c;d+1)$ в некотором порядке.

Т.к. A_tA_{t+1} и A_0A_1 пересек., то $c\in[0;1]$, а $d\leq 0$, $d+1\geq 0$. Т.к. c и d — целые, то $c=0$ или 1, $d=-1$ или 0 ($d+1=0$ или 1 соотв.).

Если $c=0, d=-1$, то $\overset{(c;d+1)}{(0;0)} = A_0 \Rightarrow A_tA_{t+1}$ и A_0A_1 соседн. ?!

Если $c=0, d=0$, то $\overset{(c;d)}{(0;0)}$ (одна из вн. $A_t;A_{t+1}$) $=A_0 \Rightarrow A_tA_{t+1}$ и A_0A_1 соседн. ?!

Если $c=1, d=-1 \Rightarrow (c;d+1)=(1;0)=A_1 \Rightarrow A_tA_{t+1}$ и A_0A_1 — соседн. зв. ?!

Если $c=1, d=0 \Rightarrow (c;d)=(1;0)=A_1 \Rightarrow A_tA_{t+1}$ и A_0A_1 — соседн. зв. ?!

$\Rightarrow$ такое невозм. $\Rightarrow k\leq 250$.

~~Пример: Рассм. правильный 1000-уг. Занумеруем его в-ны, нач. с произв., по часовой стрелке: $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$.~~

~~Лемма: Числа $1, 1+d, 1+2d, \dots, 1+(n-1)d$ дают разные остатки по mod n, если НОД$(n,d)=1$.~~

~~Док-во леммы: От прот. Пусть $\exists\, i,j\in\mathbb{N}_0$, $0\leq i,j\leq n-1$, $i\neq j$ такие, что $1+id\equiv 1+jd \pmod n \Rightarrow jd-id=(j-i)d \,\vdots\, n$. Т.к. НОД$(n,d)=1$, то $j-i \,\vdots\, n$, но $0\leq i,j\leq n-1 \Rightarrow -n<j-i<n \Rightarrow j-i=0 \Rightarrow j=i$?! — пр. невозм.~~

~~Лемма доказана.~~

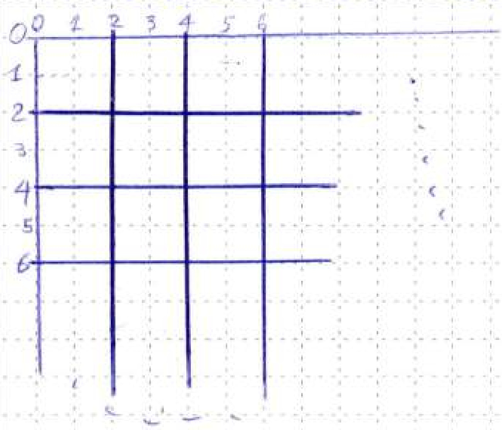
~~Обозн. за i-е звено ($\forall i\in\mathbb{N}$, $1\leq i\leq 1000$)~~ $A_{1+(i-1)374}$ A_{1+374i} (~~нумерация циклична по mod 1000~~).

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 1 из 2 Номер участника: 14

+ 7

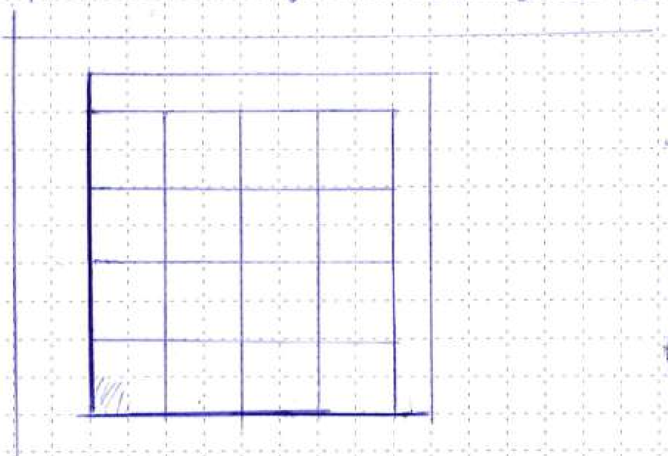
Доказательство: Разобьём доску на квадраты 2×2



Занумеруем верт. линии, иг. вдоль клетчатой сетки ~~сверху вниз~~ слева направо: 0, 1, 2, ..., 30. Аналогично занумеруем гориз. линии, иг. вдоль клетчатой сетки сверху вниз: 0, 1, 2, ..., 30.

Тогда доска 30×30 разбита верт. и гориз. линиями с номерами ⋮2 на квадраты 2×2. Всего квадратов 2×2 $\frac{30\cdot30}{2\cdot2}=\frac{900}{4}=225$, ~~Рассм. квадрат 9×9 внутри~~ и в каждом стоит ≤1 короля (т.к. если там стоит ≥2 короля, то их клетки либо сос. по стороне, либо по диаг. — т.е. они бьют друг друга). Тогда в каждом квадрате 2×2 разбиения либо 0 королей, либо 1. Если ровно в X ~~из~~ кв. 2×2 разбиения 1 король, то в 225−X кв. 2×2 нет королей, и всего X королей на доске. Т.к. по усл. всего 220 королей, то ровно в 220 кв. 2×2 разб. стоит 1 король, а в 225−220=5 кв. нет королей.

Рассм. произв. квадрат 9×9 внутри доски.



~~Т.к. 9 ⋮̸ 2, то его~~ Его огр. 2 верт. и 2 гориз. линии, причём у 2 верт. линий огр. его номера отличаются на 9, и у 2 гориз. линий, огр. его, номера отличаются на 9. ~~Выберем верт. и гориз.~~ Тогда ровно у 1 из верт. линий огр. его номер ⋮2, и ровно у 1 из гор. линий, огр. его номер ⋮2 —

— рассм. ~~угловую клетку~~ исх. 9×9, которую огр. эти 2 линии. Тогда квадрат 8×8, у которого стороны идут по этим верт. и гориз. линиям, ~~(с центром в ней угловой клетки)~~ ~~сам~~ лежит внутри исх. квадрата 9×9, и разбивается верт. и гориз. линиями доски 30×30 на

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 5 Лист 2 из 2 Номер участника: 14

кв $\frac{8\cdot 8}{2\cdot 2} = 16$ квадратов 2×2 разбиения. Из них в ≤ 5 квадратах нет королей (т.к. всего пустых кв. 2×2 разбиения ровно 5), т.е. в $\geq 16-\cancel{1\times}5 = 11$ стоит по королю $\Rightarrow$ в этом кв. 8×8 $\geq 16-5=11$ королей $\Rightarrow$ в исх. (произв.) кв-те 9×9 ≥ 11 королей. Доказано.

т.к. рассм. кв-т 8×8 полностью лежит внутри кв-та 9×9 рассм.

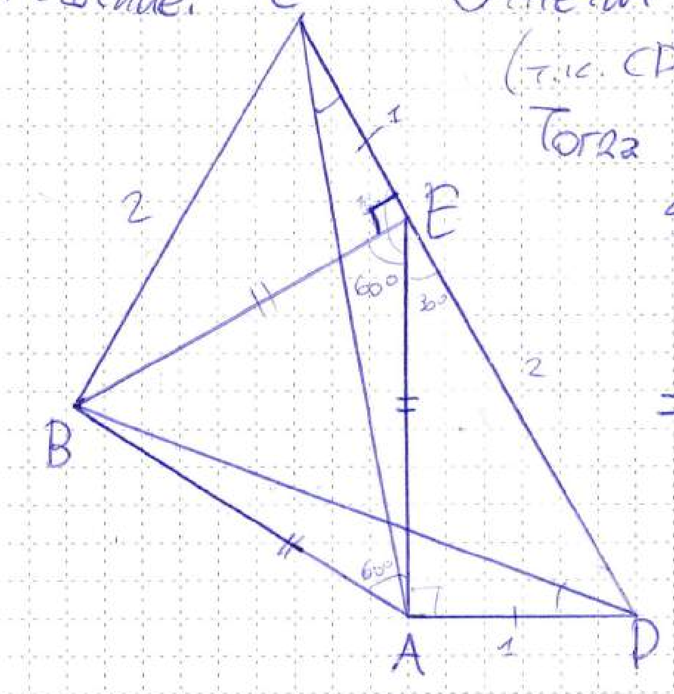
Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 14

+ 7

Ответ: $BC=2$

Решение:



Отметим $(\cdot)E \in [CD]$: $CE = 1 = AD$.
(т.к. $CD = 3 > 1$, $E \in [CD]$).

Тогда $BD = AC$ — по усл.
$\angle BDA \underset{\text{усл.}}{=} \angle ACD \underset{\substack{\text{т.к.}\\ E\in[CD]}}{=} \angle ACE$
$DA = 1 = CE$
$\Rightarrow \Delta BDA = \Delta ACE$ по 1 пр-ку

$\Rightarrow BA = AE$
$\angle AEC = \angle BAD \underset{\text{по усл.}}{=} 150°$

$\Rightarrow \angle AED = 180° - \angle AEC = 180° - 150° = 30°$
$ED = CD - AD = 3 - 1 = 2 = 2\cdot 1 = 2AD$

По т. синусов для ΔADE $\dfrac{AD}{\sin(\angle AED)} = \dfrac{ED}{\sin(\angle EAD)}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sin(30°)} = \dfrac{2}{\sin(\angle EAD)} \Rightarrow \sin(\angle EAD) = \dfrac{2\cdot\sin(30°)}{1} = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1} = 1$

(*) $\Rightarrow \angle EAD = 90° \Rightarrow \angle BAE = \angle BAD - \angle EAD = 150° - 90° = 60°$, $BA = AE$

$\Rightarrow \angle ABE = \angle AEB = \dfrac{180° - \angle BAE}{2} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60° \Rightarrow \Delta ABE$ — р/ст $\Rightarrow$

$\Rightarrow BE = AE$, $\angle AEB = 60°$.

$\Rightarrow \angle BEC = \angle AEC - \angle AEB = 150° - 60° = 90°$

$\Rightarrow$ ~~$CE = 1 = DA$~~ $BE = EA$
$\angle BEC = 90° = \angle EAD$
$EC = 1 = AD$
$\Rightarrow \Delta BEC = \Delta EAD$ по 1 пр-ку
$\Rightarrow BC = ED = 2$.

Дополнение:

(*) т.к. если $\sin(\angle EAD) = 1$, то ~~ф-ия $\sin(x) \leq 1$~~

$\sin^2(\angle EAD) = 1 \Rightarrow \cos^2(\angle EAD) = 1 - \sin^2(\angle EAD) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \cos(\angle EAD) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. кос. для ΔEAD $ED^2 = EA^2 + AD^2 - 2\cdot AE\cdot AD\cdot \underbrace{\cos(\angle EAD)}_{0} = EA^2 + AD^2$

$\Rightarrow$ по обр. т. Пиф. $\angle EAD = 90°$.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 14

+ В1 7мм

Ответ: нет.

Решение: Лемма: Если $ab+a+1 \vdots p^k$, $bc+b+1 \vdots p^k$, где $p \in \mathbb{P}$ (т.е. p-простое), $k \in \mathbb{N}$, то $ca+c+1 \vdots p^k$.

Док-во леммы: $НОД(a,p)=1$, т.к. иначе $a \vdots p$ (т.к. a, $p \in \mathbb{P}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{ab+a}_{a(b+1)} \vdots p \Rightarrow ab+a+1 \not\vdots p$ (т.к. $p \neq 1$) — Противоречие. Значит, $НОД(a,p)=1$.

$НОД(c+1,p)=1$, т.к. иначе $c+1 \vdots p$ (т.к. p-простое) $\Rightarrow bc+b=b(c+1) \vdots p$

$\Rightarrow bc+b+1 \not\vdots p$ (т.к. $p \neq 1$) — Противоречие. Значит, $НОД(c+1,p)=1$

Т.к. $НОД(a,p)=1$, то $a \not\vdots p \Rightarrow НОД(a,p^k)=1$. Аналог. $НОД(c+1,p^k)=1$.

Тогда $ab+a+1=a(b+1)+1 \equiv 0 \pmod{p^k} \Rightarrow a(b+1) \equiv -1 \pmod{p^k}$

$\underset{\text{т.к. } НОД(a,p^k)=1}{\Rightarrow} b+1 \equiv -\frac{1}{a} \pmod{p^k} \Rightarrow b \equiv -1-\frac{1}{a} = -\frac{a+1}{a} \pmod{p^k}$

И $bc+b+1=b(c+1)+1 \equiv 0 \pmod{p^k} \Rightarrow b(c+1) \equiv -1 \pmod{p^k}$

$\underset{\text{т.к. } НОД(c+1,p^k)=1}{\Rightarrow} b \equiv -\frac{1}{c+1} \pmod{p^k} \Rightarrow -\frac{a+1}{a} \underset{p^k}{\equiv} c \underset{p^k}{\equiv} -\frac{1}{c+1} \pmod{p^k}$

$\Rightarrow -\frac{a+1}{a} \equiv -\frac{1}{c+1} \pmod{p^k} \Rightarrow \frac{a+1}{a} \equiv \frac{1}{c+1} \pmod{p^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a+1)(c+1) \equiv 1 \cdot a \pmod{p^k} \Rightarrow ca+c+a+1 \equiv a \pmod{p^k} \Rightarrow$

$\Rightarrow ca+c+1 \equiv 0 \pmod{p^k} \Rightarrow ca+c+1 \vdots p^k$. Док-но.

Предположим, что это возможно, и $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = x^2$, где

x ~~q/p~~ — простое. Тогда, если какие-то 2 из чисел $ab+a+1, bc+b+1, ca+c+1$

$\vdots p$, то и третье $\vdots p$ по лемме. В таком случае, $\underbrace{(ab+a+1)}_{\vdots p}\underbrace{(bc+b+1)}_{\vdots p}\underbrace{(ca+c+1)}_{\vdots p} \vdots p^3$,

(где p — какое-то простое, не обяз. равное q)

~~$(ab+a+1)$~~

$\Rightarrow abc+1 \vdots p$, т.к. иначе $abc+1 \not\vdots p \Rightarrow НОД(abc+1,p)=1 \Rightarrow x^2 = \frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} \vdots p^3$

~~Но~~ $\vdots p^3$ — Противоречие, т.к. ~~$p^2 \not\vdots p^3$~~ $v_p(x^2) \leq 2$, $v_p(p^3) \geq 3$

$\Rightarrow 2 \geq 3$ — невозм.

$\Rightarrow abc+1 \vdots p$, $ab+a+1 \vdots p$. $\Rightarrow abc+ac+c = \underbrace{(ab+a+1)}_{\vdots p}c \vdots p$,

$abc+1 \vdots p \Rightarrow ca+c-1 = \underbrace{(abc+ac+c)}_{\vdots p} - \underbrace{(abc+1)}_{\vdots p} \vdots p$

Но т.к. $ca+c+1 \vdots p \Rightarrow 2 = \underbrace{(ca+c+1)}_{\vdots p} - \underbrace{(ca+c-1)}_{\vdots p} \vdots p \Rightarrow p=2$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 2 из 2 Номер участника: 14

Но среди чисел a, b, c есть ≥ 2 одной чётности (НУО — a и b).

Тогда если $a, b \not\vdots 2$, то $ab+a+1 \underset{2}{\equiv} 1 \cdot 1+1+1 \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow ab+a+1 \vdots \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{p}$? — Противоречие

Если $a, b \vdots 2$, то $ab+a+1 \underset{2}{\equiv} 0+0+1 \underset{2}{\equiv} 1 \Rightarrow ab+a+1 \not\vdots \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{p}$. Противоречие

Значит, это невозм. Тогда $\forall p$ — простое, ≤ 1 из чисел $ab+a+1$, $bc+b+1$, $ca+c+1$ $\vdots p$ (т.е. $ab+a+1$, $bc+b+1$ и $ca+c+1$ попарно вз. просты).

Тогда из чисел $ab+a+1, bc+b+1, ca+c+1$ ровно одно делится на x (НУО — $ab+a+1$). Распишем их разл. на простые: $ab+a+1 = x^t p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $bc+b+1 = q_1^{\beta_1} \ldots q_e^{\beta_e}$, $ca+c+1 = r_1^{\gamma_1} \ldots r_m^{\gamma_m}$

Тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = x^t p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_e^{\beta_e} r_1^{\gamma_1} \ldots r_m^{\gamma_m}$,

а $\frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{abc+1} = x^2 \Rightarrow abc+1 = x^{t-2} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k} \underbrace{q_1^{\beta_1} \ldots q_e^{\beta_e}} \underbrace{r_1^{\gamma_1} \ldots r_m^{\gamma_m}}$.

$\Rightarrow abc+1 = \underbrace{\underset{t-2\geq 0}{x^{t-2}} p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}}_{\geq 1} \cdot (bc+b+1) \cdot (ca+c+1)$

$\Rightarrow abc+1 \geq \underbrace{(bc+b+1)}_{>(b+1)} \underbrace{(ca+c+1)}_{>ac} \cancel{= abc} > (b+1)ac = abc+ac$

$\Rightarrow 1 > ac \cancel{\Rightarrow ac <}$ Но $a, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a, c \geq 1 \Rightarrow ac \geq 1 > ac$ — Противоречие

Значит, это невозможно.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 8 Лист 1 из 1 Номер участника: 14

0 клб $\overline{п\ п}$

~~Ответ: нет.~~

~~Решение:~~ Доказательство: Предположим, что это возможно. Для каждой группы из 24 гирь сопоставим группу из ост. гирь такого же суммарного веса (по усл. $\exists$ такая есть). ~~Занумеруем~~ Пронумеруем все группы по 24 гири в произв. порядке: ~~$G_1, G_2, \dots, G_k$~~ $E_1, E_2, \dots, E_k$, где $k = C_{50}^{24}$, а сопост. им "дополнения" соотв. — $D_1, D_2, \dots, D_k$. ~~Обозн. за~~

Пронумеруем гири в произв. порядке: ~~$G_1, G_2, \dots, G_{50}$~~ $1, 2, \dots, 50$. Обозн. их ~~масс~~ веса за $m_1, \dots, m_{50}$ соотв. $\forall_{1 \le i \le k}^{i \in \mathbb{N}}$ обозн. за $M(E_i)$ — вес набора гирь E_i, а за $M(D_i)$ — вес набора гирь D_i. Т.к. по усл. $\forall_{1 \le i \le k}$ $M(D_i) = M(E_i)$, то $M(E_1) + M(E_2) + \dots + M(E_k) = M(D_1) + M(D_2) + \dots + M(D_k)$. ~~Среди наборов~~ $\forall_{1 \le x \le 50}^{x \in \mathbb{N}}$ гиря x присутствует ровно в ~~C_5~~ C_{49}^{23} наборах из $E_1, \dots, E_k$.

т.к. нужно выбрать ещё 23 гири из ост. 49

$$\frac{C_{49}^{23}}{k} = \frac{C_{49}^{23}}{C_{50}^{24}} = \frac{\frac{49!}{23! \cdot 26!}}{\frac{50!}{24! \cdot 26!}} = \frac{49! \cdot 24!}{50! \cdot 23!} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25} \Rightarrow C_{49}^{23} = \frac{12}{25} \cdot k$$

Обозн. за $M = m_1 + \dots + m_{50}$ — общий вес всех гирь

$$\Rightarrow M(D_1) + \dots + M(D_k) = \frac{12}{25} k (m_1 + \dots + m_{50}) = \frac{12}{25} k \cdot M.$$

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!