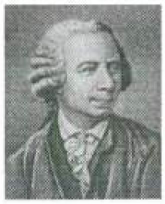


8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Гум16 - ....

аудитория – посадочное место

41306275

номер участника

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ ОЛ.	+ .МС	— МК	
7 АЮ	7 ЕМ.	5 КА	0 ВБ	19

N1

4 пятёрки.

$n = 45 = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 = 5+6+7+8+9+10$ —

2-хор., 3-хор., 5-хор. и 6-хор. ⇒ за 45

Вася получит 4 пятёрки.

Допустим, Вася получил 5 пятёрок ⇒

~~[illegible]~~ есть 5 разл. k: $k \in (1; 7)$, $k \in \mathbb{N}$ ⇒

$k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, для которых

n k-хор. ⇒ n 2-хор., 3-хор., 4-хор., 5-хор. и 6-хор.

n 2-хор. ⇒ $n = m + (m+1) = 2m+1 \not\vdots 2$, $m \in \mathbb{N}$

n 4-хор. ⇒ $n = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) = 4m+6 \vdots 2$, $m \in \mathbb{N}$

⇒ противоречие ⇒ макс. 4 пятёрки.

N2

Пусть n учеников, каждый посещает по m кружков. Рассмотрим количество таких троек из ученика A и кружков a и b, что A посещает a и b (a и b неупорядочены).

Для каждого ~~ученика~~ A есть $\frac{m(m-1)}{2}$ таких троек ⇒ их $\frac{n \cdot m(m-1)}{2}$. Для каждой из $\frac{7 \cdot 6}{2}$

пар кружков есть 3 такие тройки =>
этих троек $\frac{7\cdot6\cdot3}{2}$

$\Rightarrow \frac{n\,m(m-1)}{2} = \frac{7\cdot6\cdot3}{2}$

$n\cdot m(m-1) = 7\cdot6\cdot3$

$m \in [1;7]$, $m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

1) $m=1 \Rightarrow 0 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow \varnothing$

2) $m=2 \Rightarrow 2n = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = 7\cdot9 = 63 > 60 \Rightarrow \varnothing$

3) $m=3 \Rightarrow n\cdot3\cdot2 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = 21$

4) $m=4 \Rightarrow n\cdot4\cdot3 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = \frac{21}{2} \Rightarrow \varnothing$

5) $m=5 \Rightarrow n\cdot5\cdot4 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = \frac{63}{10} \Rightarrow \varnothing$

6) $m=6 \Rightarrow n\cdot6\cdot5 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = \frac{21}{5} \Rightarrow \varnothing$

7) $m=7 \Rightarrow n\cdot7\cdot6 = 7\cdot6\cdot3 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow \varnothing$

верная оценка перебором

Значит, $m=3$, $n=21 \Rightarrow$ 21 ученик.

Для 21 ученика такое возможно:
пусть кружки a, b, c, d, e, f, g,
а ученики ходят в такие наборы кружков:

a b c	~~a c f~~	a d g
b c d		b e a
c d e	a c e	c f b
d e f	b d f	d g c
~~f g a~~ e f g	c e g	e a d
~~g a b~~ f g a	d f a	f b e
g a b	e g b	g c f
	f a c	
	g b d	

пример верный

=> для кажд. пары кружков ровно 3 ученика.

N3

Пусть $a^2+b^2+c^2=a+b+c=S$, $a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{c+a+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a-1)^2}{S-(a-1)}+\frac{(b-1)^2}{S-(b-1)}+\frac{(c-1)^2}{S-(c-1)}\le\frac{3}{S+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{S-x}+\frac{y^2}{S-y}+\frac{z^2}{S-z}\le\frac{3}{S+1} \quad (1)$$

$S-x=b+c+1>0$; ан-но $S-y>0$, $S-z>0$.

$S+1=a+b+c+1>0$

$(1)\Leftrightarrow (S+1)\left(x^2(S-y)(S-z)+y^2(S-x)(S-z)+z^2(S-x)(S-y)\right)\le$
$\le 3(S-x)(S-y)(S-z) \quad (2)$

$(S+1)\left(x^2(S-y)(S-z)+y^2(S-x)(S-z)+z^2(S-x)(S-y)\right)=$
$=(S+1)\cdot\left(x^2S^2-x^2S(y+z)+x^2yz+y^2S^2-y^2S(x+z)+y^2xz+\right.$
$\left.+z^2S^2-z^2S(x+y)+z^2xy\right)=$
$=(S+1)\left(S^2(x^2+y^2+z^2)+xyz(x+y+z)-\right.$
$\left.-S\left(x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)\right)\right)=$

$x^2+y^2+z^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3=$
$=S-2S+3=3-S$

$x+y+z=a+b+c-3=S-3$

$=(S+1)\left(S^2(3-S)+xyz(S-3)-S\left(x^2(S-3-x)+y^2(S-3-y)+\right.\right.$
$\left.\left.+z^2(S-3-z)\right)\right)=$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306275 — номер участника

лист 4 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

$= (S+1)\left(3S^2 - S^3 + xyz(S-3) - S(S-3)(x^2+y^2+z^2) + \right.$
$\left. + S(x^3+y^3+z^3)\right) =$
$= (S+1)\left(3S^2 - S^3 + S(S-3)^2 + xyz(S-3) + S(x^3+y^3+z^3)\right) =$
$= (S+1)\left(3S^2 - S^3 + S^3 - 6S^2 + 9S + xyz(S-3) + S(x^3+y^3+z^3)\right) =$
$= (S+1)\left(-3S^2 + 9S + xyz(S-3) + S(x^3+y^3+z^3)\right) =$
$= -3S^3 - 3S^2 + 9S^2 + 9S + xyz(S^2-2S-3) + S(S+1)(x^3+y^3+z^3) =$
$= -3S^3 + 6S^2 + 9S + xyz(S^2-2S-3) + S(S+1)(x^3+y^3+z^3)$

$3(S-x)(S-y)(S-z) = 3\left(S^3 - (x+y+z)S^2 + (xy+xz+yz)S - xyz\right) =$
$= 3\left(S^3 - (\cancel{2}S-3)S^2 + \cancel{\beta}\frac{1}{2}\left((x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)\right)S - xyz\right) =$
$= 3\left(S^3 - S^3 + 3S^2 + \frac{1}{2}\left((\cancel{3-3}S-3)^2 - (3-S)\right)S - xyz\right) =$
$= 3\left(3S^2 + \frac{1}{2}(S^2 - 6S + 9 + S - 3)S - xyz\right) =$
$= 3\left(3S^2 + \frac{1}{2}(S^2 - 5S + 6)S - xyz\right) =$
$\cancel{= 9S^2 + \frac{3}{2}S^3 - \frac{15}{2}S^2 + 9S - 3xyz}$
$\cancel{3(3} = 3\left(3S^2 + \frac{1}{2}\cancel{(}S^3 - \frac{5}{2}S^2 + 3S\right) - 3xyz =$
$= 3\left(\frac{1}{2}S^3 + \frac{1}{2}S^2 + 3S\right) - 3xyz =$
$= \frac{3}{2}S^3 + \frac{3}{2}S^2 + 9S - 3xyz$

$(2) \Leftrightarrow -3S^3 + 6S^2 + 9S + xyz(S^2-2S-3) + S(S+1)(x^3+y^3+z^3) \le$
$\le \frac{3}{2}S^3 + \frac{3}{2}S^2 + 9S - 3xyz \Leftrightarrow$
$-3S^3 + 6S^2 + xyz\,S(S-2) + S(S+1)(x^3+y^3+z^3) \le \frac{3}{2}S^3 + \frac{3}{2}S^2 \Leftrightarrow$
$\cancel{\Leftrightarrow} -3S^2 + 6S + xyz(S-2) + (S+1)(x^3+y^3+z^3) \le \frac{3}{2}S^2 + \frac{3}{2}S \Leftrightarrow$
$xyz(S-2) + (S+1)(x^3+y^3+z^3) \le \frac{9}{2}S^2 + \frac{15}{2}S \Leftrightarrow$
$\left(abc - (ab+ac+bc) + (a+b+c) - 1\right)(S-2) + (S+1)\left(a^3+b^3+c^3 - 3(a^2+b^2+c^2) + \right.$
$\left. + 3(a+b+c) - 3\right) \le \frac{9}{2}S^2 + \frac{15}{2}S \Leftrightarrow$

$-\frac{9}{2}S$

$$\cancel{(}abc-\frac{1}{2}(S^2-S)+S-1)(S-2)+(S+1)(a^3+b^3+c^3-3S+3S-3)\le$$
$$\le\frac{9}{2}S^2+\frac{15}{2}S \Leftrightarrow$$
$$abc(S-2)+(S-2)\left(-\frac{1}{2}S^2+\frac{3}{2}S-1\right)+(a^3+b^3+c^3)(S+1)-3S-3\le$$
$$\le\frac{9}{2}S^2+\frac{15}{2}S \Leftrightarrow$$
$$abc(S-2)-\frac{1}{2}S^3+\frac{3}{2}S^2+S^2-3S-S+2+$$
$$+(a^3+b^3+c^3)(S+1)-3S-3\le\frac{9}{2}S^2+\frac{15}{2}S \Leftrightarrow$$

$-\frac{9}{2}S$

$$abc(S-2)+(a^3+b^3+c^3)(S+1)\le\frac{1}{2}S^3+2S^2+\frac{29}{2}S+1 \quad (3)$$

$-\frac{3}{2}S$

~~$0\le abc$~~

$$S^2=(a+b+c)^2\ge a^2+b^2+c^2=S \Rightarrow S^2\ge S \Rightarrow \left[\begin{array}{l}S=0\\ S\ge1\end{array}\right.$$
$$\frac{S}{3}=\frac{a+b+c}{3}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}=\sqrt{\frac{S}{3}} \Rightarrow$$
$$S^2\le3S \Rightarrow S\le3$$
$$\Rightarrow S\in[1;3]$$
$$abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=\left(\frac{S}{3}\right)^3;\ abc\ge0 \Rightarrow$$
$$abc\in\left[0;\left(\frac{S}{3}\right)^3\right] \Rightarrow abc(S-2)\le(S-2)\frac{S^3}{27}$$
$$a^3+b^3+c^3\le(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=S^2$$
$$abc(S-2)+(a^3+b^3+c^3)(S+1)\le$$
$$\le(S-2)\frac{S^3}{27}+S^2(S+1)\le1+S^3+S^2$$

$-\frac{3}{2}S$

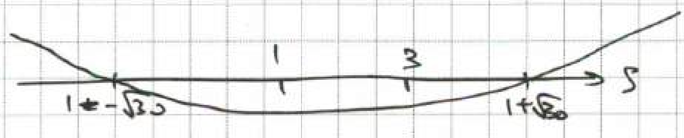
$$1+S^3+S^2\le\frac{1}{2}S^3+2S^2+\frac{29}{2}S+1 \Leftrightarrow$$

$-\frac{3}{2}S$ $\quad +\frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2}S^3\le S^2+\frac{29}{2}S \Leftrightarrow \frac{1}{2}S^2-S-\frac{29}{2}\le0 \Leftrightarrow \quad S\in[-1,3]$$

$+3$

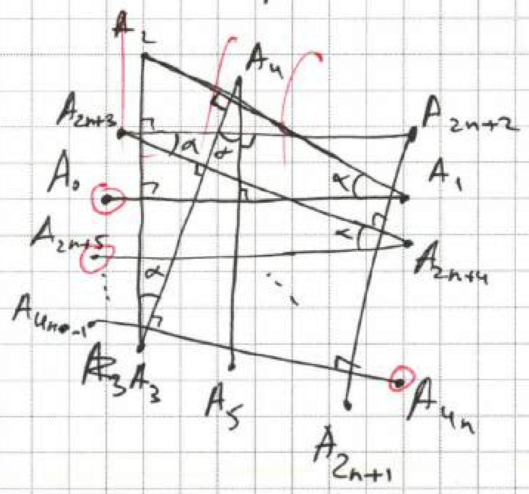
$$2S^2-2S-29\le0;\ D=4+4\cdot29+4\cdot30 \Rightarrow S=\frac{2\pm2\sqrt{30}}{2}=1\pm\sqrt{30}$$



$\Rightarrow$ (*) при $S \in [1;3]$ верно $\Rightarrow$
(3) верно

№4

Рассмотрим такую ~~конструкцию~~: ломаную: все рёбра длины 1.



При достаточно маленьких α каждое звено этой ломаной будет пересекать под прямым углом и ~~рёбер~~ у ломаной будет 4n звеньев.

Построим равност. ~~треуг~~ $\triangle ABC$
и такую ломаную с $A_0 \equiv A$, $A_{4n} \equiv B$, $n = 83$;
такую ломаную с $A_0 \equiv B$, $A_{4n} \equiv C$, $n = 83$;
такую ломаную с $A_0 \equiv C$, $A_{4n} \equiv A$, $n = 84$;
$\Rightarrow$ ломаная, полученная при объед. этих 3 ломаных, будет удовл. условию, $k = 83$.

как?

Технический лист
День 2

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Тиль - ....
аудитория – посадочное место

41306275
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ АА	+ ех	− пр	∅ АА	
7 пр	7 рх	1 ех	∅ пр	15

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306275 — номер участника

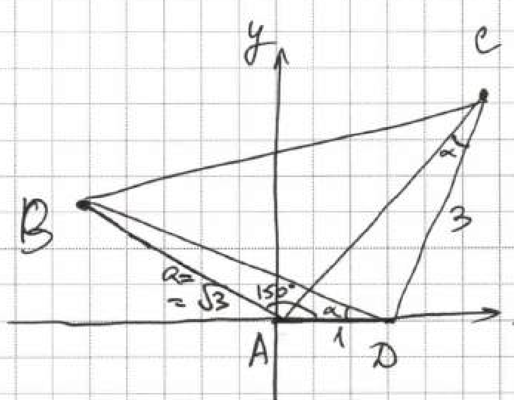
лист 1 из 4

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№5

Разобьём доску на 225 квадр. 2×2.
В каждом из них макс. 1 король ⇒
~~В2~~ в 220 из них по 1 королю,
в 5 нет королей.
В любом квадрате 9×9 содержится целиком
16 ~~квадр~~ из квадратов разбиения,
из них макс. 5 пустых ⇒
хотя бы 11 королей есть.

№6



Введём сист. коорд. так, что $A(0;0)$, $D(1;0)$.

Пусть $AB = a$ ⇒

$B(a\cos 150^\circ; a\sin 150^\circ) \Rightarrow B\left(-a\frac{\sqrt3}{2}; \frac{a}{2}\right)$

$BD = \sqrt{\left(1+a\frac{\sqrt3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{1+a^2+a\sqrt3}$

$AC = BD = \sqrt{1+a^2+a\sqrt3}$

~~$\angle ADB = \angle ACD = \alpha \Rightarrow$~~ $\angle ADB = \angle ACD = \alpha$

Пусть $C(x;y) \Rightarrow AC^2 = 1+a^2+a\sqrt3 = x^2+y^2$

$CD^2 = 9 = (x-1)^2+y^2 = x^2+y^2-2x+1 \Rightarrow$

$1+a^2+a\sqrt3 - 2x+1 = 9$

$2x = a^2+a\sqrt3-7 \Rightarrow x = \frac{a^2+a\sqrt3-7}{2}$

Т-ма cos для $\triangle ABD$:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos\alpha$

$a^2 = 1 + 1 + a^2 + a\sqrt{3} - 2\sqrt{1+a^2+a\sqrt{3}}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}+2}{2\sqrt{1+a^2+a\sqrt{3}}}$

Т-ма cos для $\triangle ACD$:

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos\alpha$

$1 = 9 + 1 + a^2 + a\sqrt{3} - 3 \cdot 2\sqrt{1+a^2+a\sqrt{3}} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}+2}{2\sqrt{1+a^2+a\sqrt{3}}}$

$0 = a^2 + a\sqrt{3} + 9 - 3\sqrt{3}a - 6$

$a^2 - 2\sqrt{3} \cdot a + 3 = 0$

$\cancel{D = 12 - 4 \cdot 3 = 0}$

$(a-\sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow B\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$AC = BD = \cancel{\sqrt{1+\frac{3}{2}+9} = \sqrt{13}}\ \sqrt{1+3+3} = \sqrt{7}$

Пусть $C(x; y) \Rightarrow$

$AC^2 = 7 = x^2 + y^2$

$CD^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 = 9$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 2x + 8 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$BC = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

Ответ: 2.

N7

Нет, не может.

Допустим, может,

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=p^2(abc+1)$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)=$

$=(ab^2c+abc+ab^2+ab+ab+a+1+bc+b)(ca+c+1)=$

$=(ab^2c+abc+ab^2+2ab+bc+a+b+1)(ca+c+1)=$

$=a^2b^2c^2+ab^2c^2+ab^2c+a^2bc^2+abc^2+abc+a^2b^2c+$

$+ab^2c+ab^2+2a^2bc+2abc+2ab+abc^2+bc^2+bc+$

$+ca^2+ac+a+abc+bc+b+ac+c+1=$

$=a^2b^2c^2+ab^2c^2+a^2b^2c^2+a^2b^2c+$

$+2ab^2c+2a^2bc+2abc^2+4abc+ab^2+bc^2+ca^2+2ab+2ac+2bc+$

$+a+b+c+1 > a^2b^2c^2+2abc+1=(abc+1)^2$

~~$=abc(abc+ab+ac+bc+2a+b+c$~~

$p^2(abc+1)>(abc+1)^2 \Rightarrow p^2>abc+1$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) \vdots p^2 \Rightarrow$

либо один из множителей делится на p^2, либо 2 делятся на p.

Не умаляя общности, 2 случая:

1) $ab+a+1 \vdots p^2 \Rightarrow ab+a+1 \geq p^2$;

$abc+1=\frac{(ab+a+1)}{p^2}\cdot(bc+b+1)(ca+c+1)>1\cdot(abc+1)=abc+1 \Rightarrow$

$\varnothing$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс; 41306275 — номер участника; лист 4 из 4

2) $ab+a+1 \vdots p$, $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow ab+a+1 \geq p$, $bc+b+1 \geq p$

Если $a \geq p$, то $ab+a+1 \geq bp \Rightarrow$

$abc+1 = \frac{ab+a+1}{p} \cdot \frac{bc+b+1}{p} \cdot (ca+c+1) \geq b \cdot 1 \cdot (ca+c+1) > abc+1 \Rightarrow$

$\varnothing$

$\Rightarrow a<p$. Аналогично $c<p \Rightarrow$

Почему верно? $\Rightarrow p^2 > ac \Rightarrow \frac{(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1)}{p^2} >$

$> \frac{a^2b^2c^2+ac}{p^2} > ab^2c+1 > abc+1 \Rightarrow \varnothing$

Значит, такого быть не может.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва