1222 - 1224

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс: 8

2. Фамилия: ВЛАСОВ

Имя: АРТЁМ

Отчество: АНДРЕЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион: Ульяновская область

4. Контактный телефон: +7 905 037 3269

5. Контактный электронный адрес: vlasoff.av.a@gmail.com

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: 4

Оценка: ~~рассмотрим $k=2$ и $k=4$~~, допустим, что нашлось n при котором пятёрок >4, т.к $pk>1 \Rightarrow 6 \geq k \geq 2$, то максимум пятёрок 5, значит если $n>4$, то только тогда n представимо 2, 3, 4, 5, 6 натуральными подряд числами. Тогда посмотрим на 2 и 4. Пусть с 2 число t, а с 4 число z первые числа.

$t+(t+1) = z+(z+1)+(z+2)+(z+3)$,

рассмотрим mod 2

$1 \underset{2}{\equiv} 6 \underset{2}{\equiv} 0$, неверно

Пример: Подходит число $n=45$

$45 = 22+23 \quad (k=2)$

$45 = 14+15+16 \quad (k=3)$

$45 = 7+8+9+10+11 \quad (k=5)$

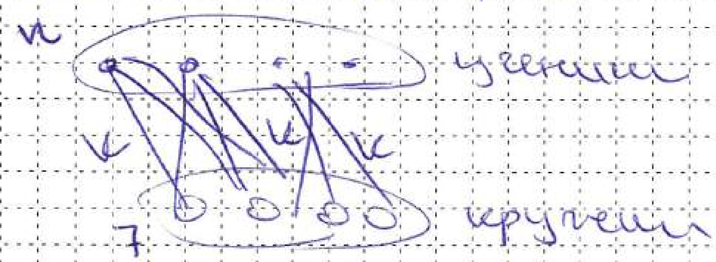
$45 = 5+6+7+8+9+10 \quad (k=6)$

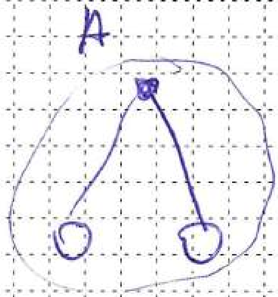
пример на 4 числа

Задача № 2 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

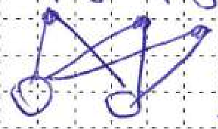
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Составим двухдольный граф.
Одна доля ученики, а вторая кружки.
Учеников $= n$, кружков $= 7$. Пусть каждый ученик дружит с k людьми. ?
Давайте посмотрим:





Их и понятно соединяем ребром если ученик там занимается. Давайте посчитаем кол-во встречающихся в нашем графе конструкций A.
(кружок — ученик — кружок) Заметим с одной стороны их $= n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$
т.к. из каждого ученика ровно k ребер что мы выберем любые 2 из них (если $k<2$, то их понятно 0). С другой стороны нам дано что на каждую пару кружков будет 3 таких конструкции



$\Rightarrow$ $\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3 = \#\text{конструкций} = n \cdot \frac{k(k-1)}{2}$

$7\cdot 6\cdot 3 = n \cdot k \cdot (k-1)$

Задача № 2 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Итак имеется: $7\cdot6\cdot3 = n\cdot k(k-1)$.
Переберём все k от 0 до 12, если $k>12$, то $n\cdot k\cdot(k-1) > 12\cdot 11 = 132 > 7\cdot6\cdot3$

1) $k=0$, не может $7\cdot6\cdot3\neq0$
2) $k=1$ $7\cdot6\cdot3\neq0$
3) $k=2$, $n=\frac{7\cdot6\cdot3}{k(k-1)}=\frac{7\cdot6\cdot3}{2}= 7\cdot9=63>60$ не подходит

!$(7\cdot6\cdot3 \,\vdots\, k(k-1))$

4) $k=3$
$n=\frac{7\cdot6\cdot3}{3\cdot2}=7\cdot3=21$ ✓

5) $k=4$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 4\cdot3$
нечётное $\rightarrow 7\cdot3\cdot3 \,\vdots\, 2$, неверно

6) $k=5$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 5\cdot4$, т.к. $7\cdot6\cdot3 \,\%\, 5$

7) $k=6$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 5$

8) $k=7$
$n=\frac{7\cdot6\cdot3}{7\cdot6}=3= 3<6$ не подходит

9) $k=8$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 8$

10) $k=9$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 8$

11) $k=10$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 10$
$7\cdot9 \,\%\, 5$

12) $k=11$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 11$

13) $k=12$
$7\cdot6\cdot3 \,\%\, 11$

Единственный вариант $n=21$, т.к. он един значит только он возможен (пример не нужен

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Раскроем скобочки. Хотим док-ть:

$$\frac{a^2-2a+1}{b+c+1}+\frac{b^2-2b+1}{c+a+1}+\frac{c^2-2c+1}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

вычтем слева из каждой дроби 1, а потом добавим 3

$$3+\frac{a^2-a-b-c-a}{b+c+1}+\frac{b^2-a-b-c-b}{a+c+1}+\frac{c^2-a-b-c-c}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

т.к. $a+b+c=a^2+b^2+c^2$:

$$3+\frac{-b^2-c^2-a}{b+c+1}+\frac{-a^2-c^2-b}{a+c+1}+\frac{-b^2-c^2-c}{a+b+1}\le\frac{3}{1+a+b+c}$$

Перенесём дроби направо

$$3\le\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}+\frac{a^2+c^2+b}{a+c+1}+\frac{b^2+c^2+c}{a+b+1}+\frac{3}{1+a+b+c}$$

Оценим знаменатель $b+c+1\le a+b+c+1$, везде так: (хотим доказать)

$$3\le\frac{2a^2+2b^2+2c^2+a+b+c+3}{a+b+c+1}\quad(a+b+c=a^2+b^2+c^2)$$

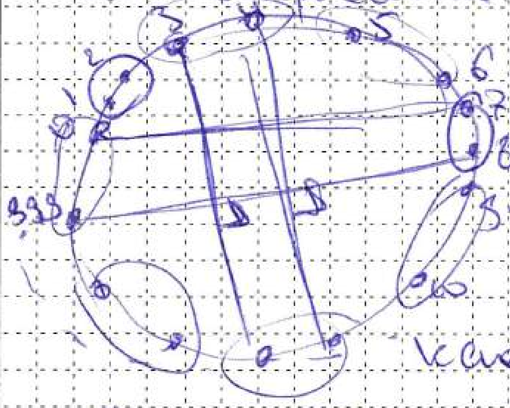
$$3\le\frac{3a^2+3b^2+3c^2+3}{a^2+b^2+c^2+1}$$

$3\le3$; $3=3$, доказано.

Задача № 4 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пример на $k=2$. Расположим точки как в правильном 1000 угольнике.



Разобьем на пары. Соединим противоположные пар звеньями. Заметим что тогда каждое звено перпендикулярно двум другим и они его пересекают.

Давайте разобьем на пары по другому и проделаем так же (всего 2 способа разбить). Тогда пронумеруем их от 0 до 999 ост. по mod 1000, тогда 0 соединён с ± 501, и каждый ост. x соединён с $x \pm 501$, ну давайте начнём с $0 \to 501\cdot 1 \to 501\cdot 2 \to 501\cdot 3$ ---

Заметим т.к. $(501, 1000)=1 \Rightarrow$ колонна по всем вершинам и они все очевидно равны.

Оценка на $k \le 250$. Пусть $k \ge 251$

Разобьем прямые на семейства параллельности. Тогда в каждом семействе их ≥ 251, т.к. рассмотрим перпенд. к семейству и там их пересекает ≥ 251 отр. $\Rightarrow \ge 251$ прямая.

Так же разобьём семейства на пары по перпендикулярности. Тогда их чётно. Ну тогда их <4, если бы ≥ 4, то $4\cdot 251 > 1000 \Rightarrow$ их ≤ 2, ~~но каждая звена не пересекает~~?

Задача № 4 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Если семейств всего 2, то они перпендикулярны и все равны. Тогда пусть первая точка (0;0), а отрезки = 1, тогда просто отметим целые точки. Заметим что отрезки вообще тогда не пересекаются тогда бы совпали концы звеньев.

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия Власов

Имя: Артём

Отчество: Андреевич

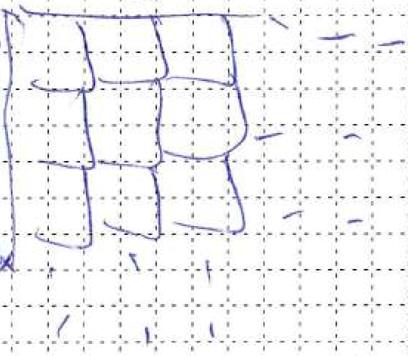
заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Ульяновская область

Задача № ~~16~~ 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Разобьём квадрат на квадратики 2x2, тогда в каждом квадратике ≤ 1 король

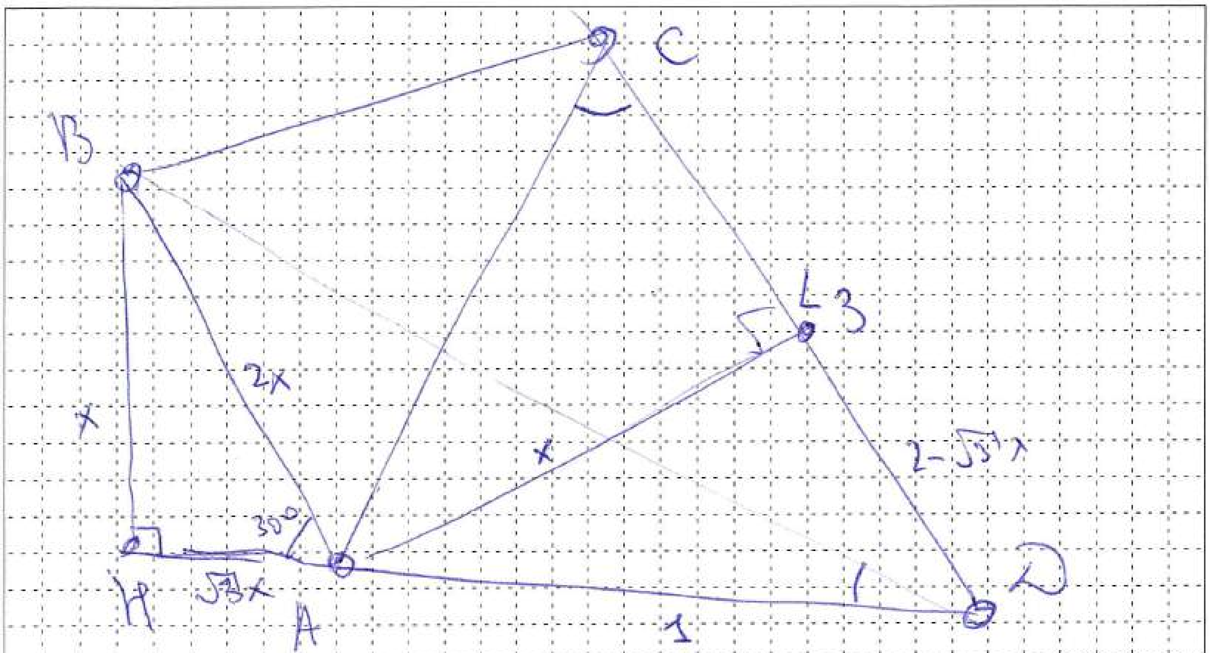


Всего их $15 \cdot 15 = 225$.

Значит во всех квадратах кроме 5 точно лежит хоть 1 ~~кв~~ король, заметим что каждый квадрат 9x9 содержит их ≥ 16 точно, и максимум в пяти из них нет короля $\Rightarrow \geq 11$ квадратов король есть. Значит в любом квадрате 9x9 ≥ 11 королей

Задача № 6 Лист 1 из 4 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Опустим перпендикуляр $BH \perp AD$ и $AL \perp CD$. (BH точно упадёт на продолжение, с AL потом рассмотрим случай). $\angle HAB = 30^\circ$, пусть $BH = x$, тогда $AB = 2x$, как угол напротив 30 в 2 раза меньше гипотенузы. Т. Пифагора в $AHB \Rightarrow AH = \sqrt{3}x$. $\Delta HBD = \Delta LAC$, ok т.к. $BD = AC$ и $\angle BDH = \angle CLA$ и прямые углы $\Rightarrow AL = x = BH$, ok $CL = HD = 1+\sqrt{3}x$

$\Rightarrow LD = 3 - 1 - \sqrt{3}x = 2 - \sqrt{3}x$.

Т. Пифагора ΔALD

$(2-\sqrt{3}x)^2 + x^2 = 1$; $\cancel{x^2}\,3x^2 - 4\sqrt{3} + 4 = 1$

$4x^2 - 4\sqrt{3} + 3 = 0$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftarrow (2x - \sqrt{3})^2 = 0$

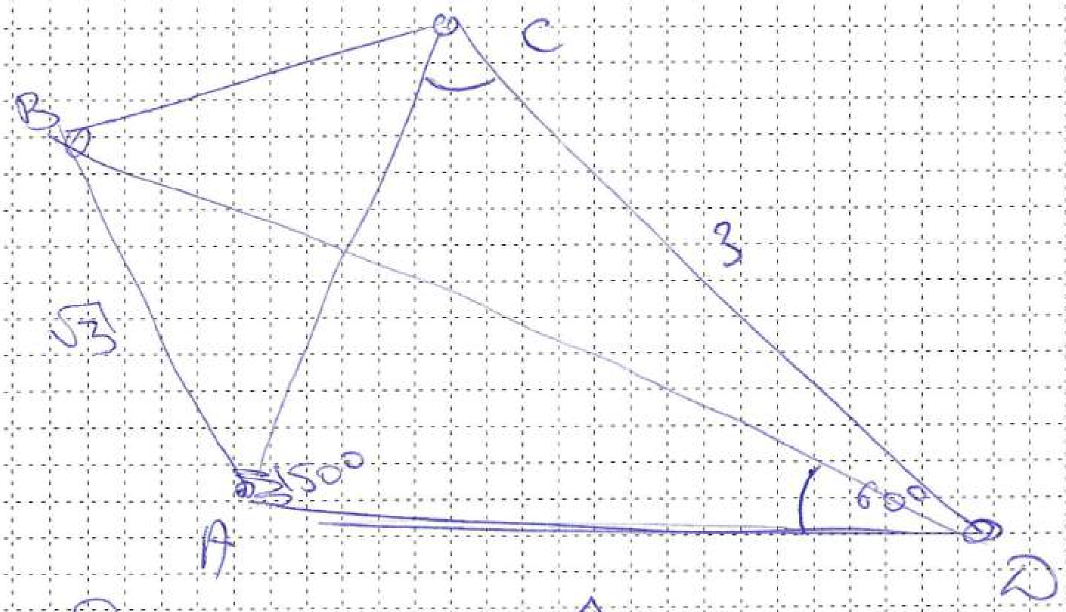
Заметим, что в $\Delta ALD = 1 = 2\cdot(2-\sqrt{3}x)$,

$1 = 2\cdot(2 - \frac{3}{2}) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \angle LAD = 30^\circ$ и

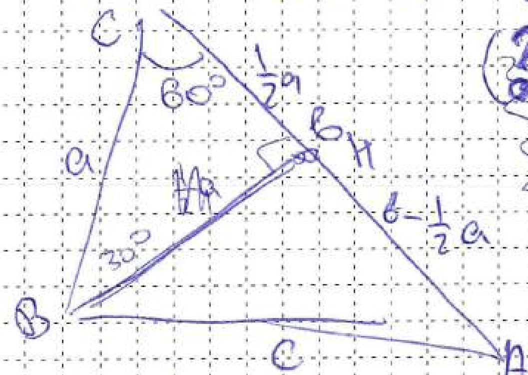
$\angle LDA = 60^\circ$. ok $2x = \sqrt{3} = BA$

Задача № 6 Лист 2 из 4 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



Докажем лемму: 1



(?) $\underline{c^2 = a^2+b^2-ab}$.

Док-во: B

Опустим $BH \perp AC$

(если на продолжение попадание перпендикуляр на AH, очевидно то-же самое получится, т.к. один из углов A или B острый)

т.к. $\angle ACB = 60^\circ \Rightarrow CH = \frac{1}{2}a$, а из-за т. Пифагора $\Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, т. Пифагора $\Delta AHB \Rightarrow c^2 = (b-\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2$

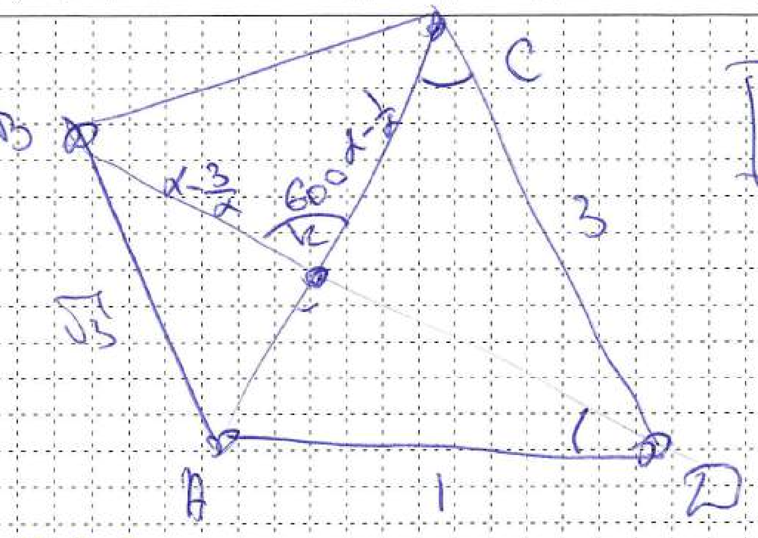
$c^2 = b^2 - ab + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 - ab + b^2}$

Пусть $AC = \alpha$, тогда $\alpha^2 = 3^2+1^2-3\cdot 1 =$
$= 7$, из ΔACD

и $\angle CDA = 60^\circ$, и $BD = \alpha$, тоже

Задача № 6 Лист 3 из 4 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



$\boxed{\alpha^2 = 7}$

$AC \cap BD = K$, тогда $\triangle CAD \sim \triangle DKA$

$\angle ACD = \angle KDA$ и $\angle CAD$ - общий

$\frac{AK}{1} = \frac{1}{AC} \Rightarrow AC \cdot AK = 1$; $AK = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow KC = \alpha - \frac{1}{\alpha}$

$\frac{KD}{3} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow KD = \frac{3}{\alpha} \Rightarrow BK = \alpha - \frac{3}{\alpha}$

Почему?

т.к. $\angle CDA = 60°$ /ок, то $\angle KDC = 60° - \angle ACD$

$\Rightarrow \angle BKC = \angle KCD + \angle KDC = 60°$

$$BC^2 = \left(\alpha - \frac{3}{\alpha}\right)^2 + \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \left(\alpha - \frac{3}{\alpha}\right)\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$$

($\triangle BKC$ и $\angle BKC = 60°$)

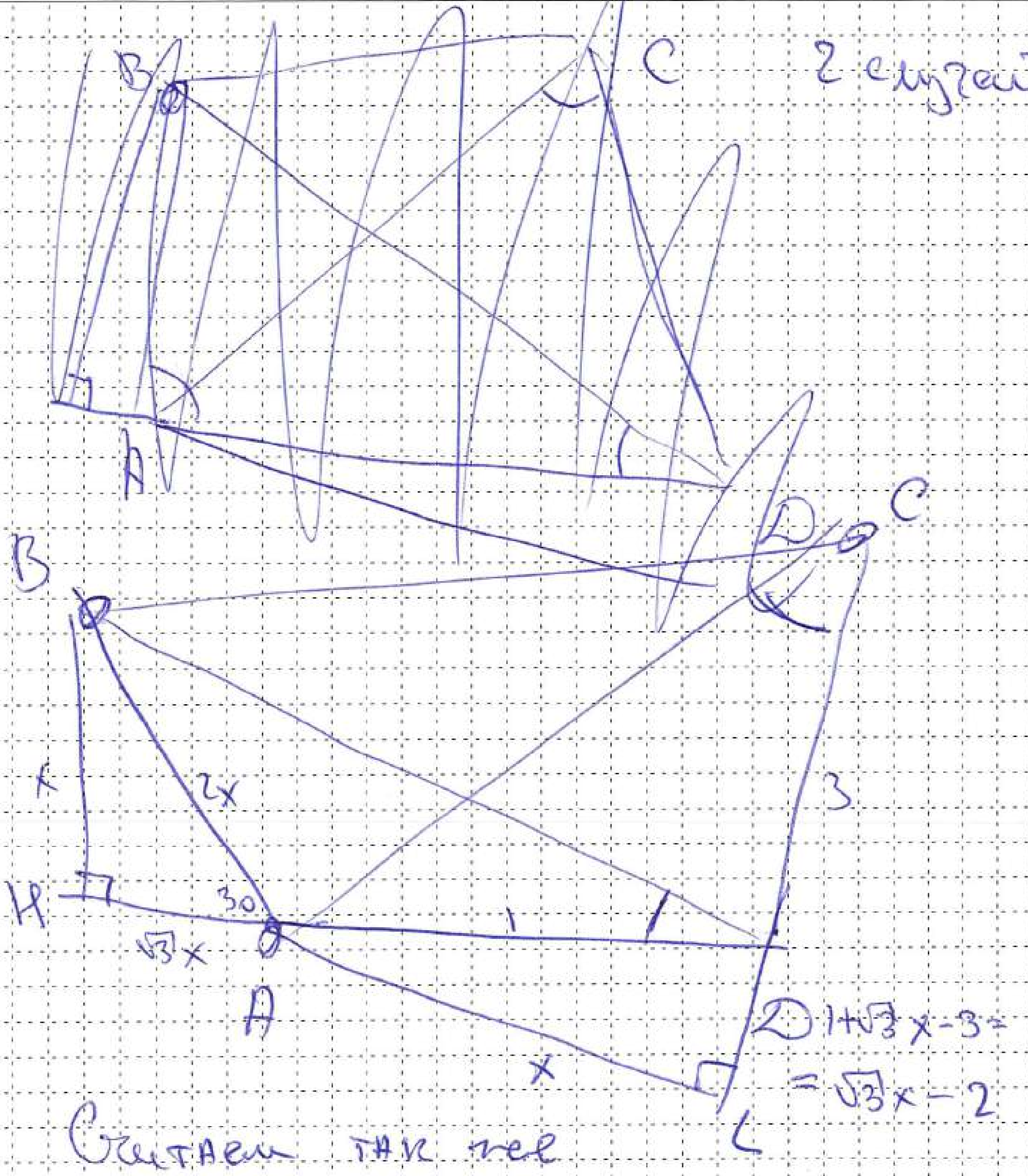
$$BC^2 = \alpha^2 - 6 + \frac{9}{\alpha^2} + \alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} - \left(\alpha^2 - 3 - 1 + \frac{3}{\alpha^2}\right)$$

$$BC^2 = \alpha^2 - 4 + \frac{7}{\alpha^2} = 7 - 4 + 1 = 4 \text{ т.к. } \alpha^2 = 7$$

$\boxed{BC = 2}$

Задача № 6 Лист 4 из 4 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!



D) $1+\sqrt{3}x-3=$
$=\sqrt{3}x-2$

Считаем так же отрезки, получаем $\triangle ADL$ =>

$x^2+3x^2-4\sqrt{3}x+4=1$

$4x^2-4\sqrt{3}x+3=0$

$(2x-\sqrt{3})^2=0$

$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ => $DL=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2=-\frac{1}{2}$)

противоречие

Ответ: $BC=2$

Задача № 7 Лист 1 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Ответ: нет ~~...~~

Пусть $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1)=p^2(abc+1)$

Сначала докажем, что ни одна правая скобка не делится на p^2.

Пусть какая-то делится, допустим $x \vdots p^2 \Rightarrow x \geq p^2$, т.е. $xyz = p^2(abc+1)$

(x, y, z это набор скобок слева)

$xyz \leq x(abc+1)$; $yz \leq abc+1$, но заметим что какими бы не были y и z, что $yz > abc+1$, т.к. возьмём произведение первых слагаемых и 1

($bc \cdot ac > abc$ допустим)

Значит никто на p^2 не делится.

~~1) Пусть ab~~

1) Пусть слева степень вхождения $p > 2$, тогда $abc+1$ точно $\vdots p$, но т.к. на p^2 никто не делится $\Rightarrow abc \underset{p}{\equiv} -1$

$ab+a+1 \vdots p$; $bc+b+1 \vdots p$; $ac+c+1 \vdots p$

~~$ab+a+abc \vdots p$~~

~~$b+1+bc$~~

$abc+ac+c \vdots p$

$ac+c-1 \vdots p$ и $ac+c+1 \vdots p$

$\Downarrow$

$2 \vdots p$ (потом рассмотрим $p=2$)

не может

Задача № 7 Лист 2 из 2 Фамилия, имя: Власов Артём

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

2) Тогда делятся слева равно 2, и делятся ровно на $\| p^1$.

~~Так~~

2.1) Пусть $ab+a+1 \vdots q$ и $bc+b+1 \vdots q$, тогда $p \neq q$, $q \neq 2$

$abc+1 \vdots q$. $abc+ab+a \vdots q \Rightarrow ab+a-1 \vdots q \Rightarrow$

$\Rightarrow q \vdots 2$, значит они были взаимнопросты

2.2) $q=2$, пусть $ab+a+1 \vdots 2$, тогда

$a(b+1) \equiv_2 1 \Rightarrow a \equiv_2 1 \quad b+1 \equiv_2 0 \Rightarrow$

$bc+b+1 \equiv_2 1$ и $ac+c+1 \equiv_2 2c+1 \equiv_2 1$

взаимно просты по 2

Где вывод?

Значит они взаимно просты все кроме одной p.

$ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p$

$ab+a+1 = p\alpha$ $(\alpha, \beta) \Rightarrow$ $bc+b+1 = p\beta$

$\alpha < p$ Почему? $\beta < p$ Почему?

$\alpha \cdot \beta \cdot (ac+c+1) = (abc+1)$

~~2.3) ...~~

$\alpha\beta \cdot ac + \alpha\beta c + \alpha\beta = abc+1$

$\alpha\beta < b$, $abc+1 \vdots ac+c+1$

$abc - ac - c \vdots ac+c+1$

$ab - a - 1 \vdots ac+c+1$

Где доказательство? Нет данного продолжения.

Почему? больше нет

$p=2$ может только при $a=b=c=1$

т.к. $ab+a+1 < p^2$, а для них неверно?