Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Янушин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пусть a начало ряда натур. k чисел $\Rightarrow k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

при $k = 2 \Rightarrow n = 2a+1$, при $k = 3 \Rightarrow 3a+3$, при $k = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a+6$, при $k = 5 \Rightarrow n = 5a+10$, при $k = 6 \Rightarrow n = 6a+15$

$\Rightarrow$ Пример на 4 пятерки:

$n = 105 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a = 52 \Rightarrow 52+53 = 105$

$\Rightarrow k = 3 \Rightarrow a = 34 \Rightarrow 34+35+36 = 105$

$\Rightarrow k = 5 \Rightarrow a = 19 \Rightarrow 19+20+21+22+23 = 105$

$\Rightarrow k = 6 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow 15+16+17+18+19+20 = 105$

Оценка:

Пусть n – нечет $\Rightarrow$ при $k = 4$ $n = 4a+6$ – чет $\Rightarrow \le 4$ пят.

Пусть n – чет $\Rightarrow$ при $k = 2$ $n = 2a+1$ – нечет $\Rightarrow \le 4$ пят.

$\Rightarrow$ всегда ≤ 4 пятерок

Ответ: 4 пятерки.

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Ягудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Пусть ~~у~~ каждый ученик посещал k кружков, а учеников n => ~~[illegible]~~ k от 0 до 7, n от 7 до 59

рассмотрим двудольный граф, где одна доля ученики вторая кружки (n вершин и 7 вершин) соединим ребром ~~[illegible]~~ ученика и кружок, который он посещал =>

=> условие равнозначно тому, что ~~[illegible]~~ на каждую пару вершин кружков опирается ровно 3 растопырки из 2 ребер. => $n \cdot \frac{k(k-1)}{2} = 3 \cdot \frac{7\cdot(7-1)}{2}$,

($\frac{k(k-1)}{2}$ - растопырок у каждой вершины детей, $\frac{7\cdot(7-1)}{2}$ - пар кружков) => $n \cdot k(k-1) = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2$

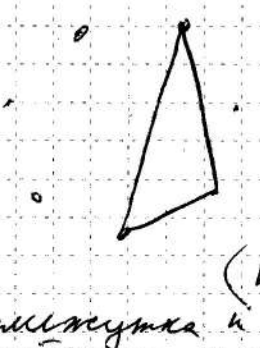
т.к k от 0 до 7 $k(k-1) \in \{0, 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42\}$, n-целое

=> по делимости подходят $k(k-1) \in \{2, 6, 42\}$ => $n \in \{63, 21, 3\}$ => подходит только $n = 21$ =>

=> $n = 21$, $k = 3$

Пример на 21 кружков

Расставим 7 вершин по кругу:



Возьмем треугольник, как на рис, т.е. с вершинами через 1, 2 и 3 промежутка прокрутим с шагом 1 этот треуг. 7 раз => мы заполним все ребра по 1 разу

(т.к существуют только ребра вида через 1, 2, 3 промежутка и при прокручивании ребра друг в друга перейти не могут (разные начала) всего ребер 21 => мы покроем все ~~[illegible]~~ по 1 разу давайте каждому треуг. сопоставим по 3 ребенка (~~[illegible]~~ $3 \cdot 7 = 21$ детей) и каждый ребенок будет ходить на 3 сопоставленных ~~[illegible]~~ кружка => для любой пары кружков (ребра) на него будет опираться ровно 3 ребенка т.к треуг. по ребрам не пересекаются => пример на 21 существует.

Ответ: 21 ребенок.

Задача № 3 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Ягудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

~~Пусть д~~

Вряд ли b бывает нулем.

Лемма: $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+c}$, при $a, b, c \ge 0$, $a \le b$

Док-во: $\frac{a}{b} \vee \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b+c) \vee b(a+c) \Rightarrow$

$\Rightarrow ab + ac \vee ba + bc \Rightarrow ac \vee bc \Rightarrow a \vee b \Rightarrow$

$\Rightarrow a \le b \Rightarrow \frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+c}$

Решение: $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = \frac{a^2-2a+1}{b+c+1}$

т.к. $a = a^2+b^2+c^2-b-c \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2-2a+1 = a^2-a-a^2-b^2-c^2+b+c+1 =$

$= (b+c+1) - (b^2+c^2+a)$, т.к. $b^2+c^2+a \ge 0$

$(b+c+1) - (b^2+c^2+a) \le b+c+1 \Rightarrow (a-1)^2 \le b+c+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ применим для $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}$ лемму $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^2-2a+1}{b+c+1} \le \frac{a^2-a+1}{b+c+a+1}$ $a \ge 0$

аналогично $\frac{(b-1)^2}{c+a+1} \le \frac{b^2-b+1}{b+c+a+1}$, $\frac{(c-1)^2}{b+a+1} \le$

$\le \frac{c^2-c+1}{a+b+c+1} \Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{b+a+1} \le$

$\le \frac{a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1}{a+b+c+1} =$

$= \frac{(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{b+a+1} \le \frac{3}{a+b+c+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ доказано.

+

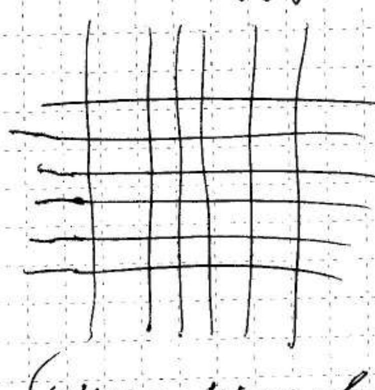
Задача № 4 Лист 1 из 5 Фамилия, имя: Чудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте зафиксируем какие-либо координатные оси и для каждого звена ~~прям~~ напишем угол наклона ~~относ~~ относ. OX ~~это будет~~ в градусах против часовой стрелки => у нас будет выписано a_1 штука α_1 наклонов a_2 α_2 и т.д. если ~~прямые~~ звенья перпендикулярны => $|\alpha_i - \alpha_j| = 90^\circ$ т.к. $\alpha_t \in [0; 180)$ =>

=> α_t разобьются на пары с разностью 90° => давайте их перенумеруем БОО ~~...~~

=> ~~a_1~~ α_1 в паре с α_2, α_3 с α_4 и т.д. ~~З~~ заметим если существует наклон ~~...~~ α_i => => должно быть $\geq k$ наклонов которые с ним в паре -> каждый $a_i \geq k$ => пусть в примере с наибольшим k 1 пара => ~~...~~ вся ломаная состоит из 2 наборов $\parallel$ звеньев ~~прямых~~ при том звенья ~~прямые~~ из различных наборов перпендикулярны => ~~все~~ рассмотрим ~~их~~ прямые звеньев они будут образовывать подобную сетку:



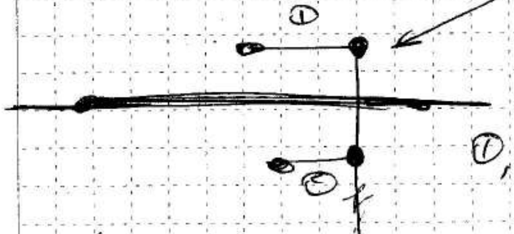
(1) рассмотрим 1 из наборов $\parallel$ и ~~з~~ возьмем самую ~~...~~ крайнюю (по одну сторону от нее не будет прямых $\parallel$ ей) т.к. наклоны звеньев строго чередуются (иначе противоречие опред. ломаной ~~...~~) верхнюю прямую должна перес. звенья (пересекают звенья верхней ~~прям~~ прямой => пересекают прямую) => должны быть вершины по обе стороны от верх. прямой -> должны быть прямые $\parallel$ верхней по обе стороны

Задача № 4 Лист 2 из 5 Фамилия, имя: Янушин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

от неё => ~~[illegible]~~ $k=0 \Rightarrow k \le 250$

Рис.



①,② - звенья есть т.к наклоны чередуются

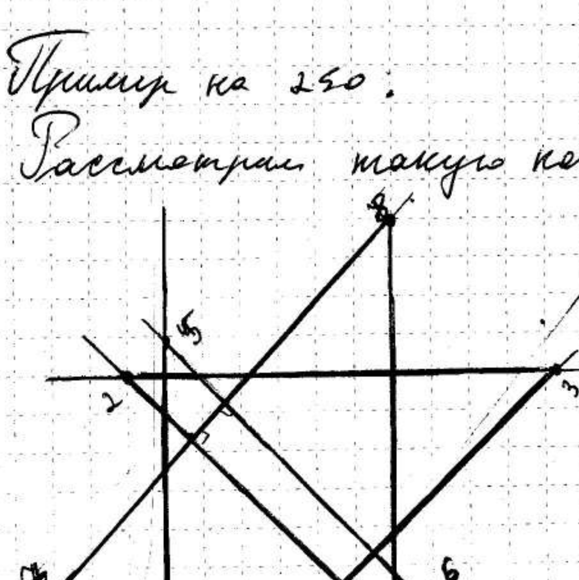
Пусть ≥ 2 пары $\to \geq 4$ a_i =>

=> т.к ~~[illegible]~~ сумма $a_i = 1000$ => по Дирихле найдется $a_i \le \frac{1000}{4} = 250$ => т.к $a_i \geq k$ =>

=> $k \le 250$ V

Пример на 250:

Рассмотрим такую конструкцию:



~~точки~~ относ ~~[illegible]~~ прямой 76, все прямые под углами 45°, 135° или 90° градусов (или ∥) ~~[illegible]~~

Давайте зафиксируем оси 67 - OX, 45 - OY, заметим что в конструкции 2 пары углов наклона и каждая прямая пересекает все прямые с ~~[illegible]~~ углом наклона в паре с ~~[illegible]~~ его углом наклона, ~~[illegible]~~ давайте отметим все точки пересечения прямых и посчитаем ~~[illegible]~~ длины отрезков между всеми ~~[illegible]~~ (а также расстояния между прямыми и точками) из точек пересечения пусть a - наименьшее (ненулевое?) из ~~[illegible]~~ этих длин (и ~~[illegible]~~ и расстояние между прям.)

Задача № 4 Лист 3 из 5 Фамилия, имя: Яудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Давайте относ OX всю конструкцию сдвинем на $\frac{a}{10^{10000}}$ вверх и на ~~столько же влево~~ вдвое меньше влево

(чтобы прямые перешли в новые) точку 9 зафиксируем как пересечение 8A и образа прямой 2A (1 с самого начало не задана)

все точки перейдут в точки +8 2 в 10, 3 в 11, по лемме

~~[зачёркнуто]~~

если звенья ~~[зачёркнуто]~~ BC, и DE пересекались ~~до~~ то BC, и ~~B~~D'E' тоже будут пересекаться (это лемма доказан позже) теперь давайте для образа конструкции произведем то же самое только сдвиг будем задавать с учетом ~~точек~~ прямых и образа и предыдущих конструкций ~~[зачёркнуто]~~

(A ≯ 9) т.е 9 не образ A, а точка задающая иначе, проделаем подобные сдвиги пока не добьем 1000 точек т.к 1000 : 8 =>

~~точка 1000~~ осталось задать точку 1

-> она будет являться пересечением 2A и ~~2~~ (1000) A' (A' - конечный образ A) оно будет лежать на BA -> пересечение отрезка ~~2~~ 1, 2 по лемме (для отрезков B A ~~B~~ B A) ни с чем не нарушатся т.к 43 и 78 двигаются влево -> ~~не~~ по лемме все остальные пересечения сохранятся, все прямые переходят в ∥ себе

=> ~~каждая прямая будет~~ каждое звено будет пересекать все которые в паре по условиям нажимам (по лемме точка пересечения не выходит за звено)

что это за точки?

как соединяются конструкции?

почему все звенья будут иметь одинаковую длину?

Задача № 4 Лист 4 из 5 Фамилия, имя: Якудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

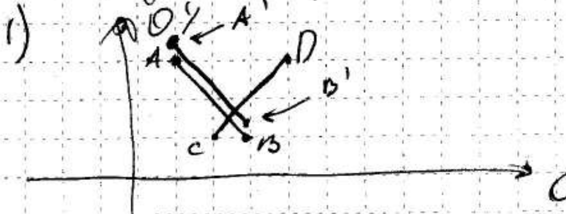
Лемма:

При движении картинки ~~...~~ по принципу расписанному в решении: ~~под прямым углом~~

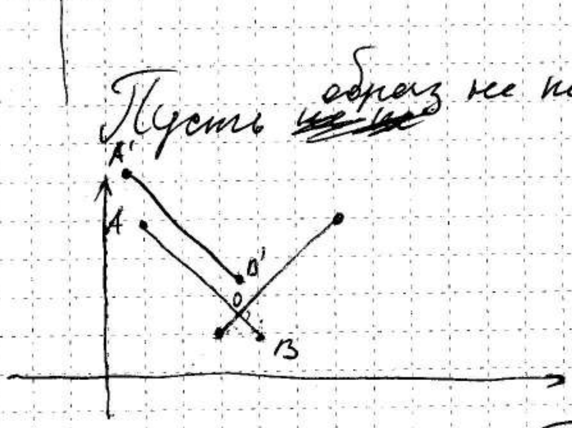
1) ~~точка не~~ если AB и CD пересек. $A'B'$ и CD - пересекаются

Д-во: Для частного ~~у~~ случая леммы используемого в задаче (угол между прямыми 45° или 90°)

1) ($AB \perp CD$)



Пусть ~~...~~ образ не пересеч.: если выехала точка A, а не B - аналогично



$\Rightarrow B'B > BO \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{a}{10^{1000}}\right)^2 + \left(\frac{a}{10^{1000}}\right)^2 \cdot \frac{1}{9}} \geq BO \geq a$

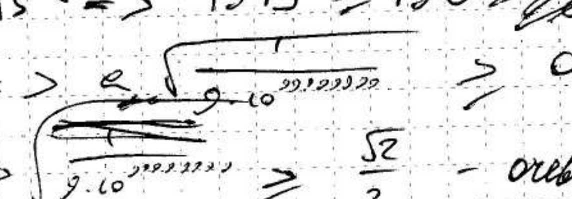
$\Rightarrow a\sqrt{\frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^{2000\ldots}}} \geq a \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{1999\ldots}}} \geq 1$ - противореч.

но в задаче прямые ~~...~~ могли быть под углом 45° (или 135°) $\Rightarrow B'B \geq BO$ ~~...~~ $\sin 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow a\sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{1999\ldots}}} \geq a \cdot \sin 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{9 \cdot 10^{1999\ldots}}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ - очевидно противоречие

~~2)~~



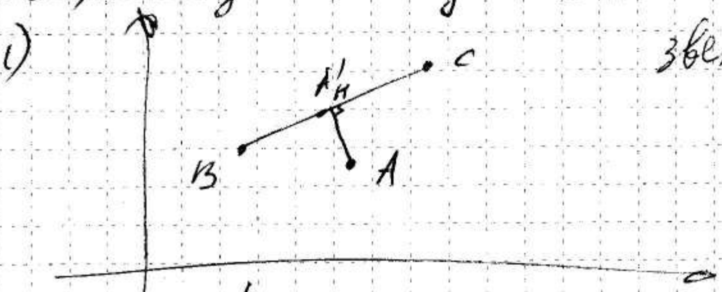
~~- аналогично первому~~

Задача № 4 Лист 5 из 5 Фамилия, имя: Якудин Лев

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

Лемма доказана => наша замкнутая ломанная 1, 2, 3, 4, 5 ... 1000 все ребра которой делятся на 2 пары и всех ребер каждого угла наклона 250, а также все звенья пересекают все ~~[illegible]~~ с углом наклона в паре с ним => каждое звено пересекает 250 перпендикулярных ему, ни один конец не лежит на другом звене:

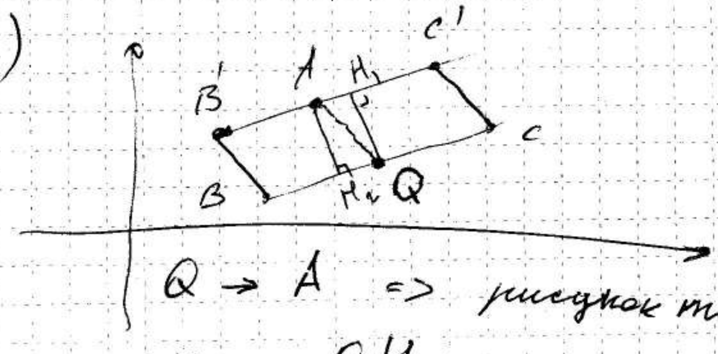
1)



звенья должны быть одинаковой длины

$$\begin{cases} A'A \geq AH \geq a \\ a\sqrt{\dfrac{1}{9\cdot 10^{99999}}} \geq a \end{cases}$$ — противоречие

2)



$Q \to A$ => рисунок такой же как 1 т.к. $AH_2 = QH_1$

~~Примечание к [illegible] док-ве леммы рассмотри~~

примечание к изначальной конструкции:

$A2 \parallel 65$, $78 \parallel 43$, $76 \parallel 23$, $45 \parallel A8$,

~~угол~~ $\angle(43, 76) = 45^\circ$, $\angle(78, 2A) = 90^\circ$

$\angle(76, A8) = 90^\circ$

Ответ: 250