РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

25 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ЯШИН

Имя: ЯРОСЛАВ

Отчество: АНДРЕЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

3. Регион Казань

4. Контактный телефон +79871364879

5. Контактный электронный адрес philippova_nina@mail.ru

Задача № 1 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Яфин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№ 1

Ответ 4. Предположим, что можно все 5 (всего значений k, больше 1 и меньше 7 равно 5). Тогда $n = a + (a+1)$, $n = b + (b+1) + (b+2)$, $n = c + (c+1) + (c+2) + (c+3)$ и т.д. Тогда $n = 2a+1 = 3b+3 = 4c+6 = 5d+10 = 6e+15$. Но $n = 2a+1$ и $n = 4c+6$ одновременно быть не может, т.к. $2a+1 \not\vdots 2$, а ~~4c+6~~ $4c+6 \vdots 2$. Значит из этой пары выполняется максимум одно равенство, значит всего 5-ок не больше четырёх. Пример на 4:

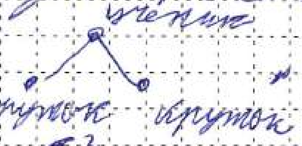
$n = 45$. Тогда $n = 22+23 = 14+15+16 = 7+8+9+10+11 = 5+6+7+8+9+10$.

Задача № 2 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№ 2

Пусть в классе n учеников, каждый ходит в v кружков. ~~Тогда~~ ~~Т.к.~~ Тогда посчитаем галочки вида



. С одной стороны их $C_7^2 \cdot 3 = 63$, т.к. ~~в каждую пару~~ на каждую пару кружков опирается ровно 3 галочки. С другой стороны их $n \cdot \frac{v \cdot (v-1)}{2}$, т.к. каждый ученик ходит ровно в $\frac{v \cdot (v-1)}{2}$ пар кружков. Тогда

$n \cdot \frac{v \cdot (v-1)}{2} = 63$, при этом ~~$n$~~ $6 < n < 60$.

n - делитель 63, тогда n - это или 7, или 9, или 21. ~~При $n = 7$~~ Случаи $n = 7$ и $n = 9$ не подходят, т.к. в них $\frac{v \cdot (v-1)}{2}$ ~~≠~~ равно 9 и 7 соответственно в обоих случаях. ~~В первом случае~~ при $v \geq 5$: $\frac{v \cdot (v-1)}{2} \geq 10$, а при $v \leq 4$ $\frac{v \cdot (v-1)}{2} \leq 6$. Значит единственный возможный ответ - это $n = 21$.

Задача № 4 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№4

Ответ: 250. Оценка: Посмотрим на все направления звеньев ломаной. Во-первых их чётное кол-во, иначе есть направление ~~котор~~ для которого нет перпендикулярного ему направления, и тогда $k=0$. Во-вторых, направлений больше двух, т.к. если направлений ровна 2, то можно сделать клетчатую решётку с ~~длин~~ стороной клетки, ~~равной (и по длине, и по~~ совпадающей с одним звеном ломаной. Тогда все звенья ломаной — стороны клеток. (Док-во по индукции, база - наше начальное звено, которое мы взяли за сторону, переход: если к куску ломаной добавляем звено, то оно должно быть одного из двух направлений и длины, равной длине стороны клетки => оно совпадает со стороной клетки, т.к. её начало - узел. (Эти два направления перпендикулярны, иначе прямого угла в принципе получится не может.)).

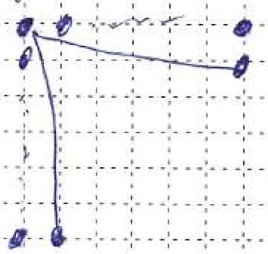
Тогда никакие два звена не

Задача № 4 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Ятин Ярослав

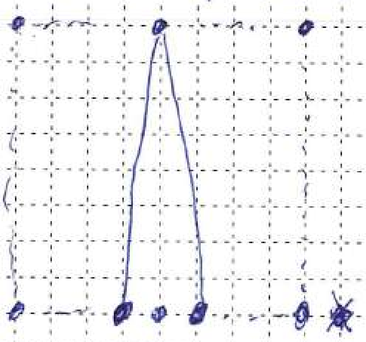
Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

пересекаются во внутр. точках. Тогда направлений ≥ 4. Тогда заметим, что какому-то направлению перпендикулярны не больше 250 звеньев, т.к. звеньев какого-то направления $\leq \frac{1000}{4}$. Тогда $K \leq 250$. Пример: Возьмём квадрат 250×250, и отметим все целые точки на границе. Теперь соединим их так:

угловые:



на рёбрах:

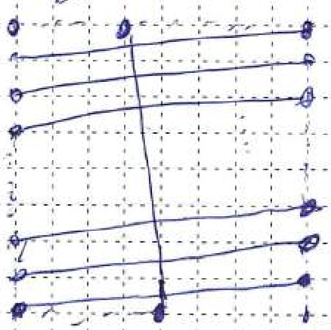


Тогда длина каждого звена — по теореме Пифагора равна $\sqrt{250^2+1^2}$. Но также алгоритм построения не противоречит сам себе (если i-ая вершина должна быть соединена с j-ой, то j-ая должна быть соединена с i-ой, т.к. разница их координат по одной оси равна 250, а по другой — 1). Также это замкнутая ломаная (сначала пройдут все нечет по верхнему ~~ряд~~ ребру и все чёт по нижнему,

Задача № 4 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

потом все нечёт по правому и все чёт по левому, потом все нечёт по нижнему и все чёт по верхнему, потом все нечёт по левому и все чёт по правому). Тогда любое звено пересекает ровно 250 звеньев, перпендикулярных ему:



(почему пересекаются: два внутренних отрезка квадрата, соединяющие разные пары противоположных сторон, почему не через крайние точки — ни одно звено не совпадает с стороной, концы у ~~этих звеньев~~ перпендикулярных звеньев не совпадают.)

РАБОТА НА XVIII ОЛИМПИАДЕ им. ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА
26 марта 2026 года

АНКЕТА УЧАСТНИКА

1. Класс 8

2. Фамилия ЯШИН

Имя: ЯРОСЛАВ

Отчество: АНДРЕЕВИЧ

заполняется печатными буквами в *именительном* падеже

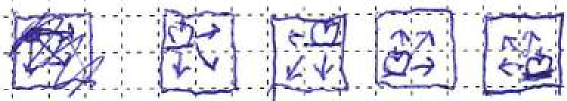
3. Регион КАЗАНЬ

Задача № 5 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Янин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№5

Разобьём доску 30×30 на квадраты 2×2. Всего их $\left(\frac{30}{2}\right)^2 = 225$ штук. Заметим, что в каждом квадрате 2×2 стоит не больше одного короля:

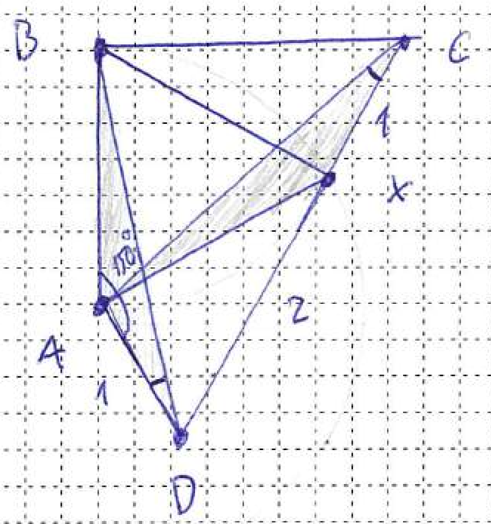


. Тогда ровно в 220 квадратах стоит по королю, в оставшихся 5 квадратах короля нет. Теперь заметим, что в любом квадрате 9×9 находится 16 полных квадратов 2×2, на которые мы разбили доску. Среди них королей может не быть максимум в 5 квадратах. Значит в остальных 11 король точно есть. Тогда в любом квадрате 9×9 есть хотя-бы 11 королей.

Задача № 6 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Ямпи Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№6



X на CD такая, что $CX = 1$. Тогда $\Delta ABD = \Delta XAC$, т.к. $DB = CA$, $DA = CX$, $\angle BDA = \angle ACX$. Тогда $\angle AXC = 150^{\circ} \Rightarrow \angle AXD = 30^{\circ}$.

Т.к. $\angle AXD = 30^{\circ}$, $XD = 2AD$, то ΔADX – прямоугольный с углами 30°, 60°, 90°. Здесь $\angle DAX = 90^{\circ}$, тогда $\angle XAB = 60^{\circ}$. Т.к. $AX = AB$ (из равенства треугольников), то AXB – равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AXB = 60^{\circ} \Rightarrow \angle CXB = 90^{\circ}$.

$AX = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$; $BX = AX = \sqrt{3}$;

$BC = \sqrt{BX^2 + XC^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Задача № 7 Лист 1 из 1 Фамилия, имя: Ятин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№7

Ответ: нет. Решение: ~~в~~ предположим противное. тогда $(ab+a+1)(bc+b+1)(ca+c+1) = p^2 \cdot (abc+1)$. Предположим что какая-то скобка делится на p^2 (пусть первая). ~~тогда~~ Тогда $ab+a+1 = p^2 k$. Тогда $k \cdot (bc+b+1) \cdot (ca+c+1) = abc+1$. Но $k \cdot (bc+b+1) \cdot (ca+c+1) \geq (bc+b+1)(ca+c+1) > (b+1)(ca+1) = abc+ac+b+1 > abc+1$. Значит такое не возможно. Тогда две скобки делятся на p. Т.е. наше выражение выглядит так:

$px \cdot py \cdot (ca+c+1) = p^2 (abc+1)$

(т.к. выражение циклически симметрично так писать можно). Т.е. $x \cdot y \cdot (ca+c+1) = abc+1$. Тогда $x \cdot y$ должно быть меньше b, т.к. $(ca+c+1) \cdot b = abc+bc+b > abc+1$.

И что?

Задача № 8 Лист 1 из 3 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

№ 8

Пусть веса гирь равны $w_1, w_2, \ldots$ ~~и т.д.~~ $\ldots w_{50}$, где $w_i < w_j \Leftrightarrow i < j$. Если такие ~~их~~ веса гирь подходят под условие, то $\sum_{i=1}^{24} w_i$ представляется как сумма нескольких других весов. При этом этих весов не больше, чем 23, т.к. иначе сумма этих весов будет строго больше, чем $\sum_{i=1}^{24} w_i$. (т.к. каждая гиря ~~весит~~ из набора, которым мы уравновесили, весит больше, чем каждая из изначального набора) тогда $\sum_{i=1}^{24} w_i \le \sum_{i=28}^{50} w_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{26} w_i < \sum_{i=27}^{50} w_i$

Тогда $\sum_{i=27}^{50} w_i$ должна быть равна сумме первых 26 весов, возможно без одного. Тогда любой другой набор гирек уравновешивается максимум 25 гирьками. Тогда заметим, что каждый из следующих

Задача № 8 Лист 2 из 3 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

наборов уравнивается ровно 25-ю гирьками:
$w_4, w_6, w_8, \ldots, w_{48}, w_{50}$; $w_4, w_6, w_8, \ldots, w_{49}, w_{50}$; ... и т.д. (каждый раз берём предыдущий набор, и сдвигаем вправо на один вес самую правую гирьку, которую можем. Т.е. $w_{48} \to w_{49}$, потом $w_{46} \to w_{47}$, $w_{47} \to w_{48}$, потом $w_{44} \to w_{45}$, $w_{45} \to w_{46}$, $w_{46} \to w_{47}$, и т.д. Каждый из них не может быть уравнен 24 гирьками, т.к. ~~после~~ перед j-ой гирькой из нашего набора (именно по счёту в наборе) идёт хотя бы j гирек из набора, которым уравниваем, значит $a_j > b_j$. (a_j - вес j-ой гирьки из нашего набора, b_j - вес j-ой гирьки из набора, которым уравниваем). Тогда каждый раз мы набор из 24 гирек уравниваем набором из 25 гирек. Тогда каждый раз у нас нет ровно одной гирьки. Тогда ~~w~~ ~~A~~ есть такое

Задача № 8 Лист 3 из 3 Фамилия, имя: Яшин Ярослав

Нумерация листов по каждой задаче отдельная! Пожалуйста, не пишите за пределами клеточек!

i, что $W_0 - 2V_i = W_i$, где W_0 – сумма ~~всех~~ весов гирь, V_i – сумма весов гирь i-ого набора. Но тогда заметим, что все суммы весов наборов различны (если смотреть порядок их задания, то строго возрастают), а всего наборов ровно $\frac{23 \cdot 24}{2} + 1$. (сумма индексов каждый раз увеличивается на 1, разница между суммами индексов в начале и в конце – ровно сумма чисел от 1 до 23). Но тогда ~~у нас удачно получается~~

значение выражения $W_0 - 2V_i$ может принимать $\frac{23 \cdot 24}{2} + 1$ различных значений. А весов гирь у нас явно меньше. ($50 < 23 \cdot 12 + 1 = 277$) Значит такое не возможно.