8

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☑ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☑ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☑ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

Гжель - ....
аудитория – посадочное место

41306252
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ АУ	+ Ем.	+ МС	— МК	
7 АЮ	7 ОЛ.	7 ТК	0 АБ	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306252 — номер участника

лист 1 из 8

№1

Ответ: 4.

Докажем, что Вася не может получить 5 пятёрок.

Заметим, что если ~~...~~ он назвал 5 пятёрок, то число k — хорошее для всех $1 \le k \le 7$, т.е. и для $k=2$ и $k=4$.

Но среди двух последовательных чисел одно нечётное и одно чётное, т.е. $n = ч + н = н$.

Но среди четырёх посл. чисел два чётные и два нечётные, т.е. $n = ч + н + ч + н = ч$, т.к. ..., ведь н и чёт. и нечёт.

Пример на 4 четвёрки:

$n = 45$:

$45 = 22+23 \ (k=2)$

$45 = 14+15+16 \ (k=3)$

$45 = 7+8+9+10+11 \ (k=5)$

$45 = 5+6+7+8+9+10 \ (k=6)$

№3

Пусть $a-1=x$, $b-1=y$, $c-1=z$,

$a+b+c=t$.

Тогда $\frac{(a-1)^2}{b+c+1}+\frac{(b-1)^2}{a+c+1}+\frac{(c-1)^2}{a+b+1} \leq \frac{3}{1+abc} \Leftrightarrow \frac{x^2}{t-x}+\frac{y^2}{t-y}+\frac{z^2}{t-z} \leq$

$\leq \frac{3}{t+1}$

№2

Пусть каждый ученик в x кружках,
а учеников — p.

~~Будем~~ ~~...~~

Рассмотрим какой-то кружок. Тогда
все его ученики посещают ещё $3 \cdot 6 = 18$ почему?
кружков. Т.е. там учится $\frac{18}{x-1}$ учеников.

некорректно написано

Далее хорошо.

Значит $18 : (x-1) \Rightarrow x = 7; 4; 3; 2$

Но $x \neq 7$, всеудь тогда все во
всех кружках, а тогда если для
каждых двух кружков учеников есть
ровно три ученика в обоих, то $p=3$, но
должно быть $p \geq 6$.

Посмотрим на ~~...~~ количество
пар вида ученик — кружок в котором
состоит этот ученик.

С одной стороны их px, а с другой

$\frac{18}{x-1}\cdot 7$. т.е. $px = \frac{18}{x-1}\cdot 7$, т.е.

$$p = \frac{126}{(x-1)x}.$$

Если $x=2$, то $p=63$, но $p<60$ — противоречие

Если $x=3$, то $p=21$

Если $x=4$, то $p=10{,}5$, но $p \in \mathbb{Z}$

Значит может быть только $p=21$, но

осталось привести пример:

всего у них есть

Давайте посадим 21 человек на 7 строк и пронумеруем их от 1 до 21.

Тогда пример будет:

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306252 — номер участника

лист 5 из ~~7~~ 8

номер кружка	тройки в кружке
1	1, 2, 3
2	3, 4, 5
3	5, 6, 1
4	1, 4, 7
5	2, 4, 6
6	2, 5, 7
7	3, 7, 6

+ Пример верный.

Тогда у ~~ос~~ любой двуре кружков ~~[illegible]~~ ровно одна общая тройка ~~[illegible]~~ и все тройки ~~[illegible]~~ ровно в трёх кружках (значит в одинаковом кол-ве) ~~[illegible]~~ =>

=> подходит.

№3

Докажем, что каждая из трёх дробей в левой части ≤ 1.

Пусть какая-то из них > 1.

НУО $\frac{(a-1)^2}{b+c+1} > 1$.

Но такие $a^2 - 2a + 1 > b + c + e$

$\Updownarrow$

$a^2 - a(\ldots)(a + bk) = a^2 + b^2 + c^2$

$\Updownarrow$

$0 > a + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0$, ведь $a \geq 0$, $b^2 \geq 0$, $c^2 \geq 0$

Значит все дроби $\leq e$. Но если к

дроби $\frac{x}{y} \leq e$ ($x \geq 0$, $y > 0$) все добавим

в чис. и знам. какое-то z ($z \geq 0$),

то дробь ~~…~~ не уменьшится (т.к. $\frac{x+z}{y+z} \geq \frac{x}{y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy + zy \geq xy + zx \Leftrightarrow x \leq y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq e$). Значит $\frac{(a-e)^2}{b+c+1} +$

$+ \frac{(b-e)^2}{a+c+1} + \frac{(c-e)^2}{a+b+1} \leq \frac{(a-e)^2 + a + (b-e)^2 + b + (c-e)^2 + c}{a+b+c+1}$

но это равно $\frac{\left(a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3+1(a+b+c)\right)}{a+b+c+1} =$

$= \frac{a^2+b^2+c^2-a-b-c+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1} \Rightarrow$ доказали

№4

Докажем, что $k \leq 500$:

пусть $k \geq 501$. Тогда рассмотрим какое-то звено A. Также возьмём перпендикулярное ему (такое есть, ведь $k>0$) звено B.

Но тогда у A есть какие-то отличные от B 500 перпендикулярных ему звеньев и у B есть 500 отличных от A перпендикулярных ему звеньев. Но т.к. всего их 1000

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Первый день, заключительный этап

8 — класс

41306252 — номер участника

лист 8 из 8

(прод. №4), и A и B два из них, то существует C перпендикулярно и A и B. Но такого быть не может ведь A перпендикулярно B.

8

Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

г.Жель... - ....

аудитория – посадочное место

41306252

номер участника

5	6	7	8	Σ
+ AA	+ AA	∅ AA	∅ AA	
7 BC	7 PX	∅ BC	∅ BC	14

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306252 — номер участника

лист 1 из 3

Разобьём ~~всю~~ доску 30x30 на квадраты 2x2.

Заметим, что в одном квадрате 2x2 может быть не более одного короля, ведь иначе они ~~бьют~~ бьют друг друга.

Всего квадратов 2x2 у нас $\frac{30\times30}{2\times2}=225$, а из них в 220 есть король.

Значит нет короля в 5.

~~Выделим~~ В квадрате 9x9 можно выделить 16 сторонних квадратов 2x2.

~~Заметим~~ При этом максимум в 5 из них ~~не~~ не стоит король, т.е. минимум королей $16-5=11$, т.е. в любом квадрате 9x9 ≥ 11 королей ч.т.д.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

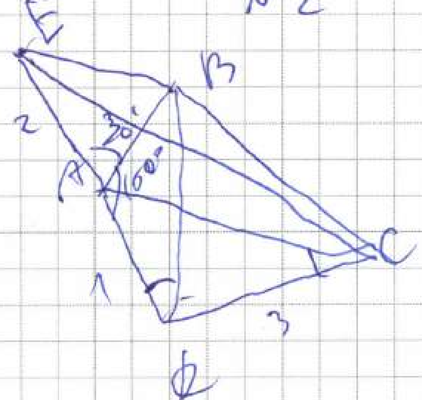
8 — класс

41306252 — номер участника

лист 2 из 3

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

№2



Возьмём E на луче DA за A такую, что $EA=2 \Rightarrow DE=3$

$\angle EDB=\angle ACD$; $ED=DC$; $DB=AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle EBD=\triangle ACD \Rightarrow EB=1$; $\angle BED=\angle ADC$.

$\angle EAB=30$; $\dfrac{EA}{AB}=2 \Rightarrow \angle EBA=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEB=\angle ADC=60^\circ$.

$\angle CED=\dfrac{180^\circ-60^\circ}{2}=60^\circ$

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Второй день, заключительный этап

8 — класс

41306252 — номер участника

лист 3 из 3

$\angle CED = \angle BED \Rightarrow B$ лежит на EC

$\triangle EDC$ — равносторонний, т.к. $ED = DC$ и

$\angle EDC = 60^\circ \Rightarrow EC = DC = 3$

$BC = EC - EB = 3 - 1 = 2$