Задача № 1 Лист 1 из 1 Номер участника: 30

Ответ: 4

Оценка: Нам нужно, чтобы n представилось в виде

$2x+3$ $(k=2)$; Если все сразу выполняются то

$3x+6$ $(k=3)$; $n=2x+3$;2,4

$4x+10$ $(k=4)$; $n=4x+10 : 2$ (?!) => точно ≤ 4.

$5x+15$ $(k=5)$;

$6x+21$ $(k=6)$; . Пример: Рассмотрим $n=$

$=45$; оно представляется

в виде $22+23$;

$14+15+16$; $7+8+9+10+11$; $5+6+7+8+9+10$;

+ КА

7 ЗМ

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 2 Лист 1 из 1 Номер участника: 30

+ К А Б 7

Давайте разберём случаи: во сколько кружков ходит каждый человек.

1) В 1. Тогда в 2 кружка сразу никто не ходит ?!

2) В 2. Тогда всего пар кружков $\frac{7\cdot 6}{2} = 21$; в каждую ходит 3 ученика, каждый ходит только в 1 пару (?!), т. к. тогда учеников $21\cdot 3 > 60$.

3) В 3. Тогда пар кружков 21; каждый ученик ходит в 3 пары кружков => учеников 21.

Ну, тут пример привести надо, давайте приведём. Пронумеруем кружки 1, 2, ..., 7, и рассмотрим людей, ходящих в такие кружки.

123, 123, 123, 145, 145, 145, 167, 167, 167, 246, 246, 246, 257, 257, 257, 347, 347, 347, 356, 356, 356. Как несложно проверить людей здесь действительно 21, а каждая пара кружков встречается ровно 3 раза.

4) В 4. Тогда каждый ученик ходит в 6 пар кружков, учеников $\frac{21\cdot 3}{6} \notin \mathbb{Z}$ (?!)

5) В 5. Тогда каждый ученик ходит в 10 пар кружков, учеников $\frac{21\cdot 3}{10} \notin \mathbb{Z}$ (?!)

6) В 6. Тогда каждый ученик ходит в 15 пар кружков, учеников $\frac{21\cdot 3}{15} \notin \mathbb{Z}$ (?!)

7) В 7. Тогда просто 3 ученика, т. к. они во всех пары ходят (?!), т. к. 3<6. Итого, Ответ: 21.

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 3 Лист 1 из 1 Номер участника: 30

$a^2 = a+b+c-b^2-c^2$

+

7

Заметим что

$(a-1)^2 = a^2-2a+1 = b+c+1-a-b^2-c^2$, т.е.

$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} = 1 - \frac{a+b^2+c^2}{b+c+1}$; Давайте так заменим все дроби и перенесём 3 в правую часть

(!) $-\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} - \frac{a^2+b+c^2}{a+c+1} - \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \le \frac{-3a-3b-3c}{1+a+b+c}$

$\Updownarrow$

$$\frac{a+b^2+c^2}{b+c+1} + \frac{a^2+b+c^2}{a+c+1} + \frac{a^2+b^2+c}{a+b+1} \geq \frac{3a+3b+3c}{1+a+b+c}$$

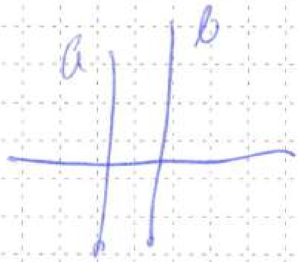
Заметим что ЛЧ (~~увеличим~~ ~~числитель~~ знаменатель дроби) $\geq \frac{a+b^2+c^2+a^2+b+c^2+a^2+b^2+c}{1+a+b+c} =$

$= \frac{3(a+b+c)}{1+a+b+c}$, т.к. $a^2+b^2+c^2 = a+b+c$ ⊙ Неравенство доказано

Задача № 4 Лист 1 из 1 Номер участника: 30

Ответ: 250

Оценка: Пусть $k \geq 251$.
Возьмём любой отрезок, назовём его и параллельные ему „вертикальными", перпендикулярные ему „горизонтальными".
Заметим, что есть ≥ 1 не вертикальный и не горизонтальный отрезок, т.к. (много) раст между a и b < d(d-длина звена), а перемещаться мы можем либо на 0, либо на d



(и мы не можем прийти из одного звена в другое) =>

=> возьмём этот отрезок, есть $\geq k$ $\perp$ ему =>
=> и $\geq k-1$ параллельных => всего отрезков $\geq 4k$, и $k \leq 250$.

Пример: Очень хотелось бы делать пример так: возьмём 2 вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, некую 250-звенную ломаную из них, повернём на $90°$ 4 раза и получим искомое (тогда бы все было хорошо). Но я не умею

Оценка (V)

$\frac{+}{4М}$

2КА

Задача № 5 Лист 1 из 1 Номер участника: 30

Давайте заметим, что в квадрате 2x2 не может стоять >1 короля (это очевидно). Разобьём 30x30 на 225 квадратов 2x2 => в ≤5 из них нет короля. В 8x8 есть 16 квадратов 2x2, в ≤5 из них нет короля => в ≥11 есть => в любом 8x8 есть ≥11 королей, а любой 9x9 содержит 8x8 => и в нем есть ≥

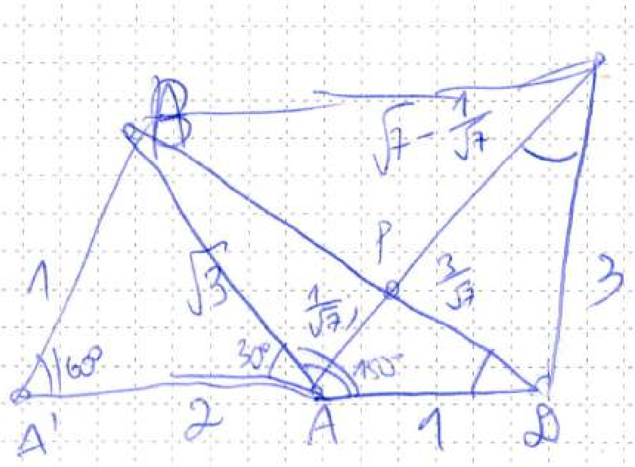
+ ½

7 АС

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 6 Лист 1 из 1 Номер участника: 30 +. Ек 7

Продлим отрезок ДА за А на 2, получим A'. Теперь $\triangle A'DB = \triangle CAD$ по 2 сторонам и углу $\Rightarrow AB = 1$.



Посмотрев на $\triangle A'BA$ ($A'B=1$, $A'A=3$, $\angle BAA' = 30°$), заметим, что $\angle BAD = 60°$ (очевидно), и $BA = \sqrt3$, теперь применим т. косинусов для $\triangle BAD$.

$BD^2 = 3+1+2\cdot\cos30\cdot\sqrt3 = 3+1+3 = 7 \Rightarrow BD = \sqrt7 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt7$. Но т.к. $\angle ACD = \angle BDA$, окр. PCD касается AD, и $AP\cdot AC = AD^2 = 1 \Rightarrow AP = \frac{1}{\sqrt7}$; и $PC =$

$= \sqrt7 - \frac{1}{\sqrt7}$, также заметим, что

из $\triangle DPA \sim \triangle CDA$, $\frac{PD}{PA} = \frac{CD}{AD} = 3 \Rightarrow PD = \frac{3}{\sqrt7}$.

Написав т. косинусов для $\triangle PCD$, получаем

$9 + \frac{9}{7} - 2\cdot\frac{9}{\sqrt7}\cos\angle BDC = 7 + \frac17 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{4}^{2} + \frac{\cancel{8}^{4}}{7} = \frac{9}{\sqrt7}\cos\angle BDC$, а $\cos\angle BDC = \frac{2\sqrt7}{9} + \frac{4}{9\sqrt7}$;

Написав т. косинусов также для $\triangle BDC \Rightarrow$ получаем

$BC^2 = 9 + 7 - 2\cdot3\cdot\sqrt7\left(\frac{2\sqrt7}{9} + \frac{4}{9\sqrt7}\right) = 16 - 6\cdot\left(\frac{14}{9} + \frac{4}{9}\right) = 16 - 12 = 4$; и $BC^2 = 4 \Rightarrow BC = 2$

Ответ: 2

Ответ: 2

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!

Задача № 7 Лист 1 из 2 Номер участника: 30

Ответ: нет. Ну, пусть может. Их частное, очевидно, $\geq \frac{...}{abc} \Rightarrow$
$\Rightarrow p$ (это простое) $\geq \sqrt{abc}$. Хорошо

Тогда заметим, что 1 скобка не может делиться на p^3, т.к. всякая скобка $< abc$. (это, наверное, требует некоего комментария)

если $ab+a+1 \geq abc$, то ≥ 1 из чисел равно 1 (Кто?, c), тогда у нас $(ab+a+1)(2b+1)(a+2) \vdots ab+1$, и тут $\frac{(ab+a+1)(2b+1)(a+2)}{ab+1} \geq$

и что?

$> (2b+1)(a+2) = 2ba+4b+a+2 > 2b+1, a+2$ и $ab+a+1$

Тогда, всё, $ab+a+1 \vdots p$ и $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow$

$\Rightarrow (ab+a+1)(bc+b+1) \vdots p$

$ab^2c + ab^2 + ab + abc + ab + a + bc + b + 1$

$b(ac+c+1) + (ab+a+1) + ab(bc+b+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow b(ac+c+1) \vdots p$. Но ~~ab+a~~ $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow b \not\vdots p \Rightarrow$
$bc+b+1 = b(c+1)+1$

$\Rightarrow ac+c+1 \vdots p \Rightarrow$ все 3 скобки делятся на p, но $\not\vdots p^2 \Rightarrow$ (иначе не входит p^3)
$\Rightarrow abc+1 \vdots p$. Но тогда $ac+c+1 \vdots p \Rightarrow abc+bc+b \vdots p \Rightarrow$
$\Rightarrow bc+b-1 \vdots p$. Но (вычтем) (вместе) $bc+b+1 \vdots p \Rightarrow 2 \vdots p \Rightarrow p=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2 \geq \sqrt{abc} \Rightarrow abc \leq 4 \Rightarrow abc = \{1;1;1\}, \{1;1;2\}$
$\{1;1;4\}, \{1;2;2\}$ в некотором порядке. Переберём.

Задача № 7 Лист 2 из 2   Номер участника: 30

1) $\{1;1;1\}$.

$27^{0};12$ ⊗

2) $\{1;1;2\}$

$4^{3};3$ ⊗

3) $\{1;1;4\}$:

$6^{3};5$ ⊗

4) $\{1;2;2\}$.

$5\cdot6\cdot5;5$, по двум

30 – не квадрат противоречие ⊗

Итого, Ответ: нет

Пишите лишь с этой стороны листа и не пишите за пределами рамки!