7

Технический лист
День 1

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- ☐ проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- ☐ после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- ☐ этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 2В
аудитория – посадочное место

41306302
номер участника

1	2	3	4	Σ
+ ЕЗ	+ Ем.	+ КА	− ВБ	
7 АЮ	7 ЕЗ	7 МС	0 МК	21

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 — класс; 41306302 — номер участника; лист 1 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача №1. Оценка на 4:

Т.к. k - натуральное, >1 и <7, то оно может принимать 5 значений: 2, 3, 4, 5, 6 $\Rightarrow$ не больше 5 пятерок

Пусть Вася мог получить >4 пятерки. Тогда т.к. всего он мог получить ≤ 5 пятерок, то он получил их ровно 5

Значит n должно являться 2-хорошим, 3-хорошим, 4-хорошим, 5-хорошим, 6-хорошим. одновременно

Нас интересует 2-хорошесть и 4-хорошесть.

~~среди 2 послед~~ ~~a_2 $a_1 + a_2$~~

для 2: $n = a_1 + (a_1+1) = 2a_1 + 1 \underset{2}{\equiv} 1$

для 4: $n = b_1 + (b_1+1) + (b_1+2) + (b_1+3) = 4b_1 + 6 \underset{2}{\equiv} 0$

получается, n должно быть одновременно сравнимо с 0 и 1 по модулю 2, а это невозможно.

$\Rightarrow$ такого быть не может, и Вася получил не больше 4 пятёрок.

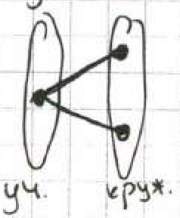
Пример: Возьмем $n = 45$.

$$\left.\begin{aligned} k=2&: \quad 45 = 22+23 \\ k=3&: \quad 45 = 14+15+16 \\ k=5&: \quad 45 = 7+8+9+10+11 \\ k=6&: \quad 45 = 5+6+7+8+9+10 \end{aligned}\right\} \text{4 оценки}$$

Ответ: 4

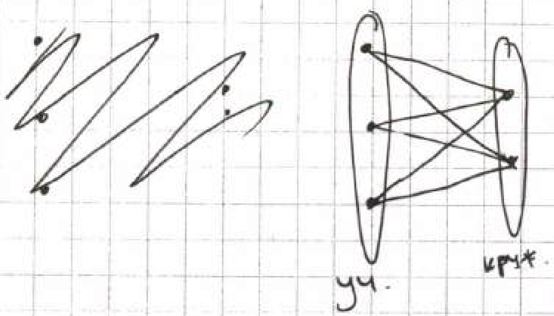
Задача 2.

Введём двудольный граф, где 1 доля - кружки, а другая - - ученики. Введём термин „растопырка": ребро, если ученик ходит в этот кружок



← вот ~~Это когда из ученика ведут 2 ребра в кружки~~ (это 2 ребра исходящих из 1 ученика)

тогда, т.к. для любых 2 кружков найдутся ровно 3 ученика, которые посещают их оба, то

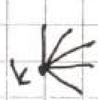


на каждую пару кружков опираются ровно 3 растопырки

Тогда всего растопырок в точности $C_7^2 \cdot 3 = 63$

кол-во пар кружков

Теперь посчитаем их со стороны учеников: пусть учеников n, и каждый посещает k кружков (по условию каждый ученик посещает одинаковое кол-во кружков) тогда из каждого ученика исходит по C_k^2 растопырки.



Тогда всего растопырок $C_k^2 \cdot n$

продолжение на стр. 3

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 класс   41306302 номер участника   лист 3 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 2. продолжение.

т.к. мы посчитали одни и те же растопырки с разных сторон (со стороны у кружков и учеников), то их равное кол-во.

$\rightarrow \quad 63 = C_k^2 \cdot n \qquad n = \frac{63}{C_k^2} \qquad C_k^2 = \frac{63}{n}$

При этом мы знаем ограничения на n:

натуральное, >6, <60

рассмотрим возможное k: (k - целое, ≥ 0)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
C_k^2	0	0	1	3	6	10	15	21	28		...

это возрастающий ряд

т.к. $n = \frac{63}{C_k^2}$ и $n > 6$; $n < 60$, то

$C_k^2 > \frac{63}{60} > 1 \rightarrow C_k^2 \geq 2$

$C_k^2 < \frac{63}{6} < 11 \rightarrow C_k^2 \leq 10$

подходит 3, 6, 10. Но $\frac{63}{6}$ и $\frac{63}{10}$ - нецелые, а должны быть целыми т.к. n - натуральное.

$\rightarrow$ подходит только $C_k^2 = 3. \rightarrow k = 3$

$\rightarrow n = \frac{63}{3} = 21$

Ответ: $\boxed{21}$

(т.к. по условию такая ситуация возможна, т.е. такой пример существует, то т.к. возможен только 1 вариант, пример на него не нужен)

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Заключительный этап

7 класс | 41306302 номер участника | лист 4 из 8

Задача 3. $a, b, c \geq 0$ (они по условию не отриц.)

$a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c \to a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c = 0$

Лемма: $\frac{x}{y} \leq \frac{x+k}{y+k}$, при $x, y, k \geq 0$ и $x \leq y$. $y \neq 0$, $y + k \neq 0$

$\to x, k \geq 0,\ y > 0,\ x \leq y$

док-во: т.к. $(k \geq 0)$

$x \leq y \to xk \leq yk \to xk + xy \leq yk + xy \to x(k+y) \leq y(k+x)$

$\to \frac{x}{y} \leq \frac{k+x}{k+y}$. чтд.

Теперь вернёмся к задаче.

Давайте прибавим $+a$ к числителю и к знаменателю 1-ой дроби:

Чтобы сработала наша лемма, хотим, чтобы

$(a-1)^2 \geq 0$ и $b+c+1 > 0$ и $a \geq 0$ и $(a-1)^2 \leq b+c+1$

первые 3 очевидны, т.к. $a, b, c \geq 0$

Докажем 4-ое:

$(!)\ (a-1)^2 \leq b+c+1$

$(!)\ a^2 - 2a + \cancel{1} \leq b + c + \cancel{1}$

$(!)\ a^2 \leq 2a + b + c$

т.к. $a \geq 0$, $2a + b + c \geq a + b + c$

т.к. $b^2 + c^2 \geq 0$, то $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$

$\to \underline{a^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 \underset{\text{(по условию)}}{=} a + b + c \leq \underline{2a + b + c}$

$\to$ это верно чтд.

продолжение на стр. 5.

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 3, продолжение.

Тогда мы можем применить лемму, будет:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1}$$

Т.к. условие полность симметрично относительно a, b, c, то мы можем проделать тоже самое для b и c (добавляя $+b$ и $+c$ соответств. к числит. и знаменат.)

тогда:

$$\frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{(a-1)^2+a}{a+b+c+1} + \frac{(b-1)^2+b}{a+b+c+1} + \frac{(c-1)^2+c}{a+b+c+1} =$$

$$= \frac{a^2-2a+1+a+b^2-2b+1+b+c^2-2c+1+c}{a+b+c+1} =$$

~~по условию~~

$$= \frac{a^2-a+b^2-b+c^2-c+3}{a+b+c+1} = \frac{0+3}{a+b+c+1} = \frac{3}{a+b+c+1} \rightarrow$$

мы знаем, что $a^2-a+b^2-b+c^2-c=0$

т.к. $a^2+b^2+c^2=a+b+c$ по условию

$$\rightarrow \frac{(a-1)^2}{b+c+1} + \frac{(b-1)^2}{a+c+1} + \frac{(c-1)^2}{a+b+1} \le \frac{3}{a+b+c+1}$$ чтд.

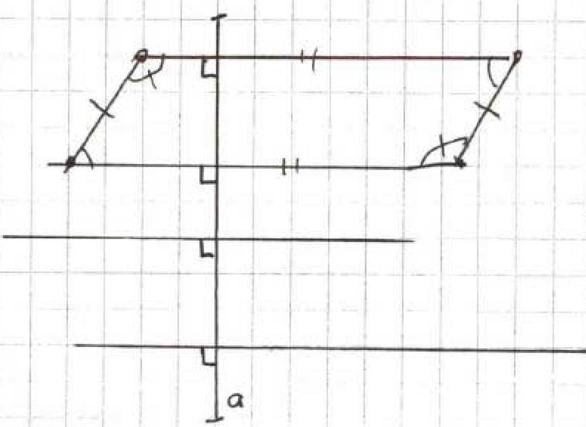
Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 класс | 41306302 номер участника | лист 6 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 4.

Рассмотрим звено а. Его должны пересекать хотя-бы k других звеньев под прямым углом. → все эти k звеньев параллельны



т.к. все звенья равны по длине, то любые 2 из этих k звеньев образуют параллелограм т.к. 2 его противоположные стороны равны и параллельны

Также, понятно, что эти k паралельных звеньев не пересекаются, т.к. параллельны. Но все это → замкнутая ломаная → из каждого из 2(k+1) концов (еще ~~возьмем~~ взяли, звено а, мы точно знаем, что оно имеет 2 конца, отличных от концов тех k звеньев)

т.к. каждое ~~зв~~ новое звено покрывает не более 2 этих концов, то нужно еще хотя бы $\frac{2(k+1)}{2}=k+1$ звено. Тогда всего звеньев хотя-бы $k+1+k+1=2k+2$ это ≤ 1000, т.к. их всего 1000. → $2k+2\le 1000$ → → $2k\le 999$ → $k\le 499$.

Давайте введём координаты. Теперь выберем среди всех концов тот, что будет самым правым, а из них выберем самый верхний. продолжение на стр.7

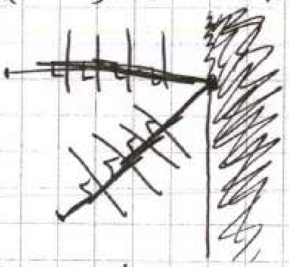
Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 — класс 41306302 — номер участника лист 7 из 8

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 4 продолжение.

Посмотрим теперь на звенья, концом которых является этот конец



Они както распологаются.

и каждый из них пересекает хотя-бы k из звеньев под прямым углом.

Причем т.к. эти 2 звена не могут быть параллельны, то это $2k$ разных звеньев.

5-4 2В

8 из 8

Номер участника	Класс
41306302	7

ФИО участника Золотникова Мария Сергеевна

Задача № 2

Вопрос Гарантируется ли, что данная ситуация, описанная в условии возможна? Т.е. если возможен только 1 вариант, приводить пример необязательно?

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ Существование примера дано в условии задачи.

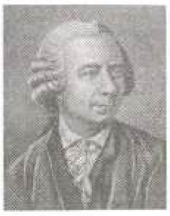
Задача №

Вопрос

Внимание! Рассматриваются вопросы только по условию задачи, но не по решению.

Ответ

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва



Технический лист
День 2

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Заключительный этап олимпиады имени Леонарда Эйлера

Отметьте галочками те пункты, которые вы выполнили:

- [x] проверьте, что на каждом сдаваемом листе работы указан ваш номер участника;
- [x] после окончания тура пронумеруйте все листы работы, кроме этого и титульного;
- [x] этот лист положите поверх всех остальных листов вашей работы.

Если все галочки проставлены – можно сдавать работу.

5-4 - 4В
аудитория – посадочное место

41306302
номер участника

5	6	7	8	Σ
+ АД	+ КН	— АД	+ КА	
7 МГ	7 РХ	0 МС	+ МК	21
			7 КЮ	

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 — класс; 41306302 — номер участника; лист 1 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

~~Давай~~ Задача 5

Давайте разобьем доску на $15^2=225$ непересекающихся квадратиков 2×2. Заметим, что в каждом из них не более 1 короля, иначе они будут бить друг друга т.к. в квадрате 2×2 любые 2 клетки соседние (по стороне или углу). ~~т.к.~~ Значит в каждом таком квадрате ~~...~~ 2×2 королей 0 или 1. Т.к. всего королей 220, а квадратиков 225, то в ровно 5 из них 0 ~~ко~~ королей, а в остальных по 1.

Тогда рассмотрим любой квадрат 9×9. Заметим, что в него ~~точ.~~ полностью попадут хотя-бы $4\times4=16$ наших изначально выделенных квадратов 2×2. и в каждом квадратике 2×2, кроме может быть 5, стоит король (пустых не более 5, т.к. их всего 5, а это какая-то часть). Тогда королей в ~~кв~~ этом квадрате 9×9 хотя-бы $16-5=11$. Т.к. это был рандомно выбранный квадрат 9×9, то это верно для каждого квадрата 9×9.

Значит, в каждом квадрате 9×9, хотя-бы 11 королей чтд.

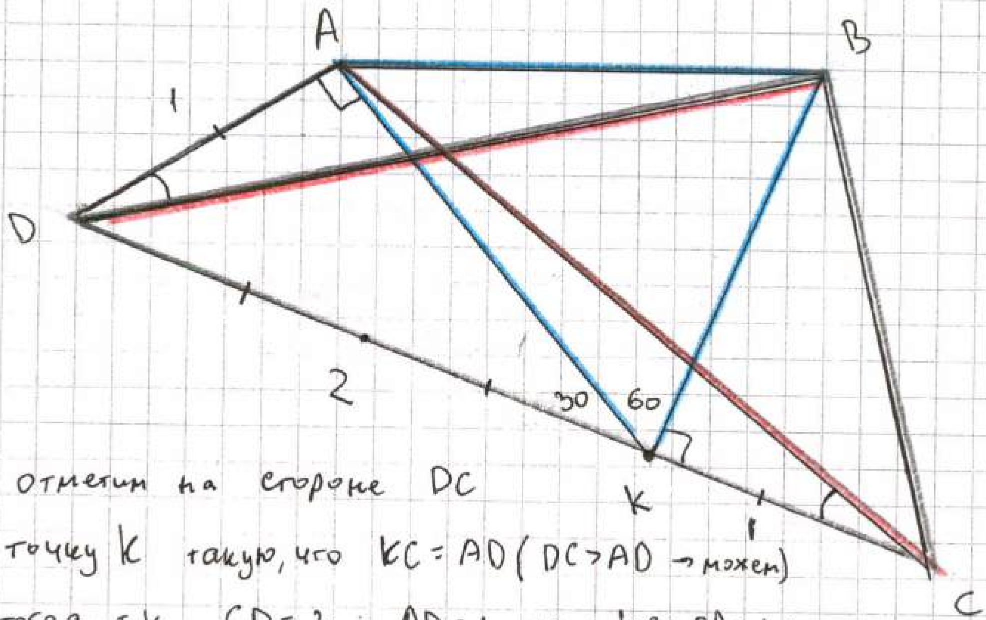
Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Заключительный этап

7 класс | 41306302 номер участника | лист 2 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 6.



отметим на стороне DC

точку K такую, что KC = AD (DC > AD → можем)

тогда т.к. CD = 3; AD = 1, то KC = AD = 1;

DK = DC − KC = 3 − 1 = 2.

посмотрим на △ADB и △KCA. т.к. KC = AD; AC = DB (т.к. по условию диоганали равны), ∠ACK = ∠ADB (по условию), то △ADB = △KCA по 1 признаку. → AB = AK и ∠AKC = ∠DAB т.к. ∠DAB = 150° по условию, то ∠DKA = ∠DKC − ∠AKC = 180° − ∠DAB = = 180° − 150° = 30°. посмотрим на △ADK. в нем сторона DK вдвое больше стороны DA, и ∠DKA = 30°. → этот △ − прямоугольный (30, 60, 90) → ∠DAK = 90°. тогда ∠KAB = ∠DAB − ∠DAK = 150° − 90° = 60°. Тогда △AKB − р/б с углом 60 (р/б т.к. AB = AK) → он р/с. → AB = AK = BK; ∠AKB = 60°.

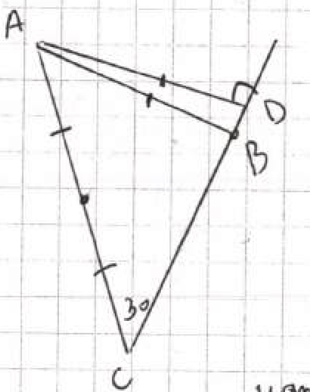
продолжение на стр. 3

Продолжение задачи 6.

тогда $\angle BKC = \angle DKC - \angle DKA - \angle AKB = 180° - 30° - 60° = 90°$

посмотрим теперь на $\triangle DAK$ и $\triangle CKB$ в ~~них~~ ~~равны катеты~~ они оба прямоугольные и в них равны катеты ($AD = KC$; $AK = BK$) → эти треугольники равны → равны их гипотенузы ⇒ $DK = BC$ т.к. $DK = 2$, то $BC = DK = 2$ → $BC = 2$, а нам его и нужно было найти. Ответ: $BC = 2$

* Докажем факт, что если в треугольнике ~~две стороны~~ 1-ая сторона в 2 раза меньше 2-ой, ~~то~~ и угол между 2-ой и 3-ей сторонами = 30°, то это прямоугольный △.



пусть это не так, опустим из A высоту на BC. основание высоты — точка D ~~в прямоугольном △ADC катет в 2 раза меньше~~ Ги тогда ~~в~~ $\triangle ADC$ → △ 30-60-90. А в таком △, как мы знаем, катет напротив угла в 30° в 2 раза меньше гипотенузы. Тогда $AD = \frac{AC}{2}$, а т.к. $AB = \frac{AC}{2}$, то $AD = AB$, но ~~AD~~ если AD и AB не совпадают, то ~~AD~~ $AB > AD$ т.к. в $\triangle ABD$, AB − гипотенуза, AD − катет. но $AD = AB$ → они должны совпадать. → AB и есть высота → $\angle ABC$ − прямоугольный, чтд.

Олимпиада имени Леонарда Эйлера

Заключительный этап

7 класс | 41306302 номер участника | лист 4 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

7 задача. пусть может, $(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = (abc+1)p^2$

$(ab+a+1)(bc+b+1)(ac+c+1) = ((a+1)(b+1)-b)((b+1)(c+1)-c)((a+1)(c+1)-a) =$

$= (a+1)^2(b+1)^2(c+1)^2 - (c+1)^2(a+1)(b+1)b - (a+1)^2(b+1)(c+1)c - (b+1)^2(c+1)\cdot$

$\cdot(a+1)a + \underbrace{(a+1)(c+1)bc + (b+1)(c+1)ab + (a+1)(b+1)ac - abc}_{=X} =$

$= (a+1)(b+1)(c+1)\left((a+1)(b+1)(c+1) - (c+1)b - (a+1)c - (b+1)a\right) + X =$

$= (a+1)(b+1)(c+1)(abc + ab + bc + ac + a + b + c + 1 - bc - b - ac - c - ab - a) + X =$

$= (abc+1)\left((a+1)(b+1)(c+1)\right) + X = \underbrace{(abc+1)\left((a+1)(b+1)(c+1)\right)}_{=Y} +$

$+ (a+1)(c+1)bc + (b+1)(c+1)ab + (a+1)(b+1)ac - abc = Y +$

$+ (abc+1)(a+b+c+1) - a - b - c - 1 - abc + c^2b + bc + b^2a + ab +$

$+ a^2c + ac + 2abc = Y + \underbrace{(abc+1)(a+b+c+1)}_{=Z} + c^2b + b^2a + a^2c +$

$+ bc + ab + ac - a - b - c - 1 + abc$ ~~+Y+Z~~ $+$

Заметим, что Y и Z $\vdots (abc+1)$, т.к представляют собой $(abc+1)$ домноженное на ~~натурать~~ целое число

тогда т.к. все $\vdots (abc+1)$, то

$c^2b + b^2a + a^2c + bc + ac + ab - a - b - c - 1 + abc \vdots (abc+1)$.

Ответ: не может.

почему?

Что дальше?

Олимпиада имени Леонарда Эйлера
Заключительный этап

7 класс | 41306302 номер участника | лист 5 из 6

Олимпиада им. Леонарда Эйлера, Москва

Задача 8.

Нет, не может.

Пусть, может. ~~В~~ Упорядочим все наши гирьки:

$a_1 > a_2 > a_3 \ldots > a_{50}$

Теперь возьмём 24 самых тяжёлых. Заметим, что если взять теперь ≤ 24 гирь из оставшихся, то их сумма будет точно меньше, чем у 24 самых тяжёлых.

Но взять мы можем не более 26 гирек, т.к. их осталось $50 - 24 = 26$. → Сумма самых тяжёлых равна сумме 25 или 26 из оставшихся.

Давайте теперь рассмотрим ~~55~~ 55 таких варианта, что брать:

1) $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_{23}$ ~~и~~ ~~23~~ и 24-ю будем менять от a_{24} до a_{47} → ~~25~~ в. 24 в

24 в-тов

2) $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_{22},\ a_{47}$ и 24-ю будем менять от a_{24} до a_{45} → ~~24~~ в 22 в

22 в-тов

3) $a_1\ a_2 \ldots a_{21}\ \ a_{45},\ a_{47}$ и 24-ю будем менять от 25 до 43 → ~~26~~ 19 в

3

19 в-в

Суммарно – ~~25+24+~~ ~~66~~. $24+22+19 = 65$

~~Теперь заметим, что в каждом таком варианте мы можем каждой из наших выбранных 24 сопоставить по 1 из оставшихся~~

продолжение на стр. 6.

Продолжение №8.

Теперь заметим, что ~~во всех~~ ~~каждый такой~~
в каждом таком варианте выбора 24 наших, набор из этих 24 будет тяжелее любого набора 24 из оставшихся. ~~→ надо брать~~, т.к. можем разбить на пары, где наши гири тяжелее в каждой. → надо брать, чтобы уравновесить 25 или 26.

Тогда если сумма нашего набора — S_k, а сумма всех — S, то $S = 2S_k + n$, где n — ~~...~~ оставшаяся незадействованная гиря, а $n=0$ в случае, если уравновесим 26-ю гирями.

n может принимать значения: $0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_{50}$. Это 51 вариант. А у нас ~~55~~ 56 > 51 разбиений.
→ в каких 2 n будет одинаковое по ПД.
Тогда их S_k тоже должны совпасть.
Т.е. суммы наборов совпадут. Но этого не может быть, потому что с каждым разом мы уменьшали сумму набора. → они все разные.
→ такого быть не могло и это невозможно.